Problemas sobre probabilidad y Variables aleatorias

1. Lanzamos un dado. Calcula:

a) Probabilidad de que salga un 1.

$\frac{1}{6}$

b) La probabilidad de que salga un 1, sabiendo que ha salido un número impar.

- Números impares en un dado → 1, 3, 5

$\frac{1}{3}$

c) La probabilidad que salga un número par

- Números pares en un dado → 2, 4, 6

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) La probabilidad de que salga un número par menor que 5.

- Probabilidad de ser menor de 5 → $\frac{4}{6}$
- Probabilidad de que salga un número par → $\frac{3}{6}$

$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

e) La probabilidad de que salga un número par, sabiendo que ha salido un número menor que 5.

- Probabilidad de que salga un número par $\rightarrow \frac{3}{6}$
- Números pares en un dado $\rightarrow$ 2, 4, 6

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

f) La probabilidad de que salga un 7.

E: {1, 2, 3, 4, 5, 6} 7, no se encuentra en el espacio muestral. La probabilidad es 0.

- La muestra es el subconjunto de la población

g) La probabilidad de que salga un 1, sabiendo que ha salido un número par.

Números Pares

$\rightarrow$ El 1 no se encuentra en el conjunto de números pares por lo tanto la probabilidad es 0.

2. De los cuatro ases de la baraja extraemos uno cada vez, sin reemplazamiento.

a) Calcula la probabilidad de que salga el as de tréboles en la primera extracción

- As de picas
- As de tréboles → La probabilidad de obtener un as de tréboles es de $\frac{1}{4}$
- As de diamantes
- As de corazones

b) En la segunda

- As de picas
- As de tréboles → La probabilidad de obtener un as de tréboles es de $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
- As de diamantes
- ~~As de corazones~~

$\frac{3}{4}$ → Probabilidad de no haber sacado un as de tréboles a la primera

c) En la tercera

- ~~As de picas~~
- As de tréboles → La probabilidad de obtener un as de tréboles es de $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- As de diamantes
- ~~As de corazones~~

$\frac{2}{3}$ → Probabilidad de no haber sacado un as de tréboles a la segunda

d) En la cuarta

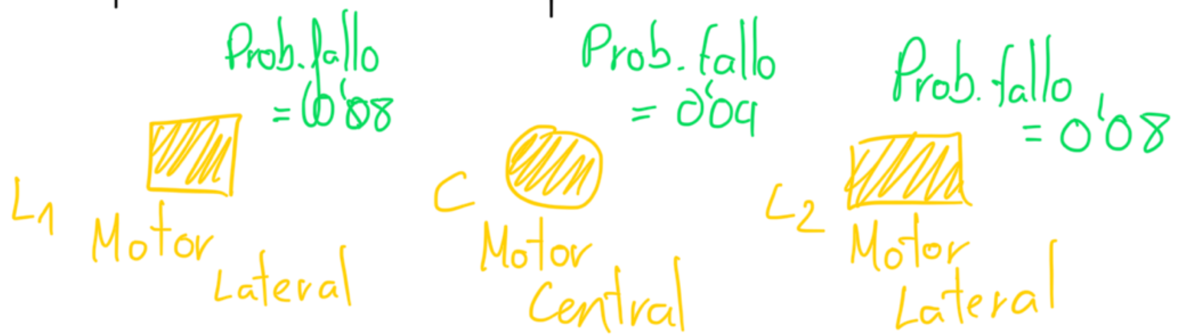
- ~~As de picas~~
- As de tréboles → La probabilidad de obtener un as de tréboles es de $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$
- ~~As de diamantes~~
- ~~As de corazones~~

c) Lo mismo, pero con reemplazamiento

Dado que esta vez se reemplazan las cartas retiradas, el número total de cartas, no se reducirá.

- Primera extracción:
  $\frac{1}{4}$
- Segunda extracción
  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$
- Tercera extracción:
  $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$
- Cuarta extracción
  $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{256}$

3. Una máquina tiene tres motores: uno central y dos laterales. La máquina falla si falla el motor central y al menos uno de los laterales. Las probabilidades de fallo individual son de 0.04 para el motor central y 0.08 para cada uno de los laterales. Los tres motores operan de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que falle la máquina?



- Hay fallo si falla el motor central y uno de los laterales.

los laterales:

- $P(M) = P(C \cap (L_1 \cup L_2)) = P((C \cap L_1) \cup (C \cap L_2))$

$= P(C \cap L_1) + P(C \cap L_2) - P(C \cap L_1 \cap L_2)$

↳ Probabilidad de que falle el motor central y el lateral 1.

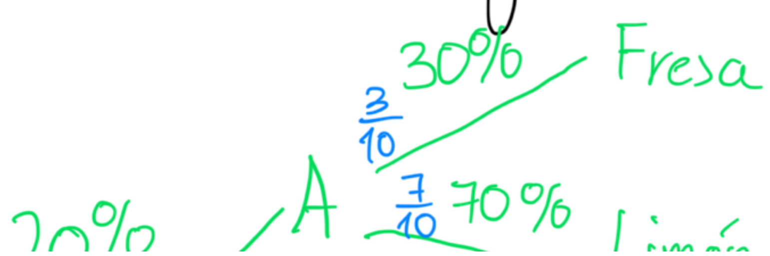
↳ Probabilidad de que falle el motor central y el lateral 2.

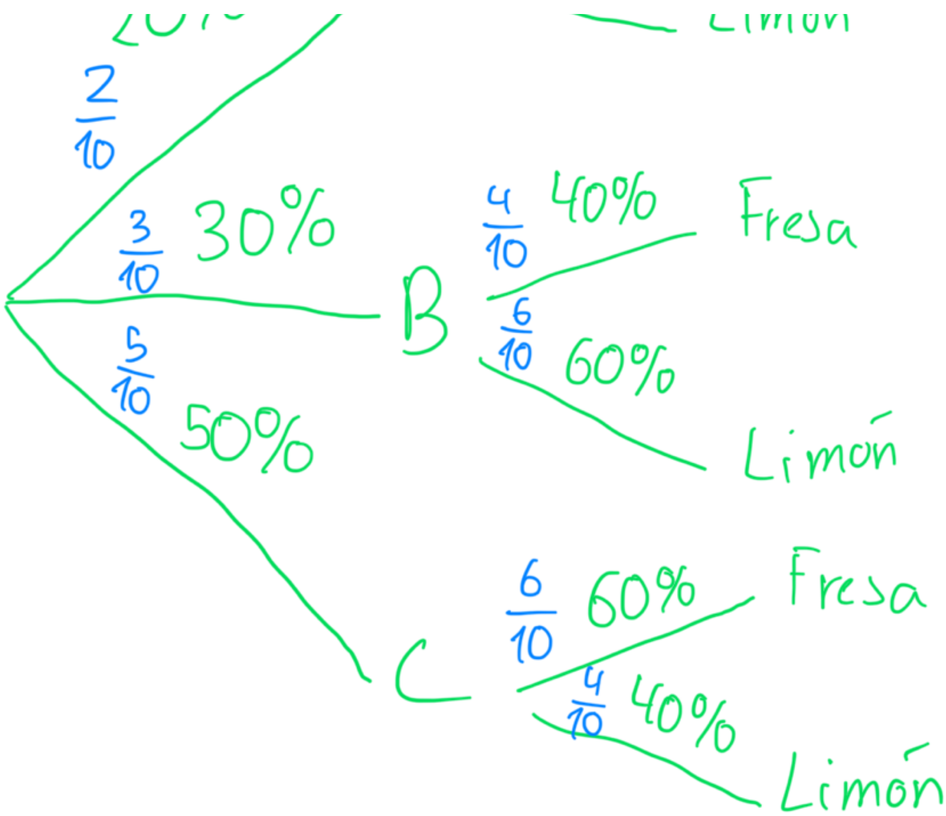
↳ Probabilidad de que fallen los dos motores laterales y el motor central.

$= (0'04 \cdot 0'08) + (0'04 \cdot 0'08) - (0'04 \cdot 0'08^2)$

$= 0'006144$

4. En un almacén hay tres tipos de bolsas de gominolas para fiestas infantiles. El 20% de las bolsas son de un tipo A y contienen un 30% de gominolas de fresa y un 70% de gominolas de limón. El 30% de las bolsas son de tipo B y contienen un 40% de gominolas de fresa y un 60% de gominolas de limón. Las demás bolsas son de tipo C y contienen un 60% de gominolas de fresa y un 40% de gominolas de limón.





a) Elegimos una bolsa al azar; sin saber de qué tipo es, sacamos una gominola. Calcula la probabilidad de que sea de limón.

$P(\text{Limón}) = P(A \cap Lim) \cup P(B \cap Lim) \cup P(C \cap Lim)$

$= P(A) \cdot P(A/Lim) + P(B) \cdot P(B/Lim) + P(C) \cdot P(C/Lim)$

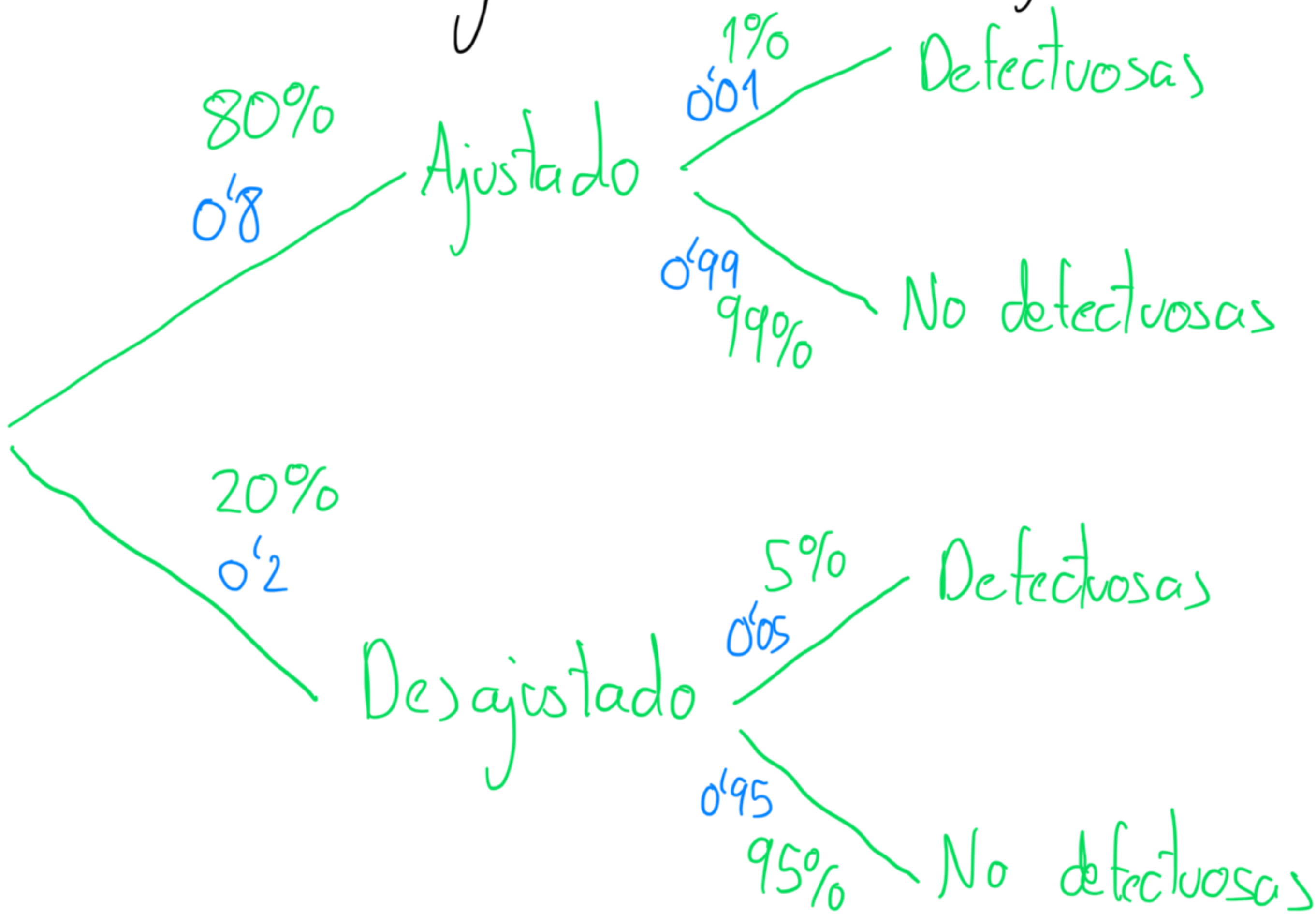
$= 0'2 \cdot 0'7 + 0'3 \cdot 0'6 + 0'5 \cdot 0'4$

$= 0'52 \rightarrow$ Probabilidad de sacar una gominola de limón.

b) La gominola resulta ser de limón. Calcula la probabilidad de que la bolsa fuera de "tipo A.

$$P(A/Lim) = \frac{P(A \cap Lim)}{P(L)} = \frac{0'7 \cdot 0'2}{0'52} = 0'27$$

5. Un proceso de fabricación genera, si está bien ajustado, un 1% de piezas defectuosas. Pero si está desajustado, este porcentaje es del 5%. La probabilidad de que el proceso esté desajustado es de 0,2.



a) No sabemos si el proceso está bien

ajustado. Se toma una pieza al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuosa.

$P(\text{Defectuosa}) = P(\text{Ajus} \cap \text{Def}) \cup P(\text{Desaj} \cap \text{Def})$

$= P(\text{Ajus}) \cdot P(\text{Ajus}/\text{Def}) + P(\text{Desaj}) \cdot P(\text{Desaj}/\text{Def})$

$= 0'8 \cdot 0'01 + 0'2 \cdot 0'05 = 0'018 \rightarrow$ Probabilidad de que sea una pieza defectuosa

b) No sabemos si el proceso está bien ajustado. Se toma una pieza al azar y resulta que es defectuosa. Calcula la probabilidad de que el proceso esté desajustado.

▫ Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(\text{Desaj}|\text{Def}) = \frac{P(\text{Desaj}) \cdot P(\text{Desaj}/\text{Def})}{P(\text{Def})} = \frac{0'2 \cdot 0'05}{0'018}$$

$= 0'556 \rightarrow$ Probabilidad de que el proceso esté desajustado si la pieza al azar es defectuosa.

c) Para controlar el proceso se decide tomar cada cierto tiempo una muestra de 10 piezas y revisar el ajuste si en la muestra se halla al menos una pieza defectuosa. Atendiendo a este criterio, calcula la probabilidad de "falsa alarma".

La probabilidad de "falsa alarma" es la probabilidad de que en una muestra de 10 piezas haya al menos una defectuosa, bajo el supuesto de que el proceso esté bien ajustado. Si el proceso está bien ajustado, el número de piezas defectuosas (X) en una muestra de 10 sigue una distribución binomial de parámetros $n=10$ y $p=0'01$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$$
$$= 1 - 0'99^{10} = 0'0956$$

6. Un niño tira a canasta y acierta con probabilidad 0'4 en cada intento; cada intento es independiente de los demás. Definimos la variable aleatoria.

• Suma geométrica $\sum_{k=3}^{\infty} r^k = \frac{r^k}{1-r}$

• Distribución geométrica

X = "Número de intentos hasta el

Geometrica

$P(X=K)=(1-p)^K \cdot p$ primer acierto (incluido)"

a) Obtén la función de probabilidad de X y comprueba que suma 1.

La distribución de X es geométrica de parámetro $p=0'4$. Entonces:

$$f(K)=(1-0'4)^{K-1}\cdot 0'4$$

$$\sum_{K=1}^{\infty} f(K)=\sum_{K=1}^{\infty}(1-p)^{K-1}\cdot p = p\cdot\sum_{K=0}^{\infty}(1-p)^K = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= p\cdot\frac{1}{p}=1$$

b) Calcula la probabilidad de que el niño necesite menos de cinco intentos.

$$P(X<5)=1-P(X\geq 5)=1$$

$$=1-\sum_{K=5}^{\infty}0'4\cdot 0'6^{K-1}=1-0'4\sum_{K=5}^{\infty}0'6^{K-1}=$$

$$0'4\cdot\frac{0'6^4}{0'4}=0'6^4=0'87$$

c) Calcula la probabilidad de que el niño necesite más de tres intentos.

$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1$$

$$= 1 - \sum_{k=4}^{\infty} 0'4 \cdot 0'6^{k-1} = 1 - 0'4 \sum_{k=4}^{\infty} 0'6^{k-1} =$$

$$1 - 0'4 \cdot \frac{0'6^3}{0'4} = 1 - 0'6^3 = 0'22$$

d) Calcula la esperanza, la mediana, la varianza y la desviación de X.

- Esperanza $\rightarrow$ $EX = \frac{1}{p} = \frac{1}{0'4} = 2'5$
- Mediana $\rightarrow$ $\text{Med } X \simeq \left[\frac{\log(0'5)}{\log(1-p)} \right] \simeq 2$
- Varianza $\rightarrow$ $\text{Var } X = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0'4}{0'4^2} = \frac{0'6}{0'4^2} = \frac{0'6}{0'16} = 3'75$
- Desviación $\rightarrow$ $\text{Dev } X = \sqrt{\text{Var } X} = \sqrt{3'75} \simeq 1'936$

7. La sección de un cable (diámetro medido en mm) se distribuye según la función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) Calcula el valor de K.

La integral de la función de densidad tiene que ser 1:

$$\int_0^1 k\cdot x(1-x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 k\cdot x(1-x)\,dx = k\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$= k\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = k\cdot\frac{1}{6}$$

$$= 1 \leftrightarrow k = 6$$

b) Obten la función de distribución

Integramos la función de densidad entre 0 y x:

$$\int_0^x 6(t-t^2)\,dt = \left[\frac{6t^2}{2}-\frac{6t^3}{3}\right]_0^x = 3x^2-2x^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x^2-2x^3 & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

c) Determina la probabilidad de que la

c) Determina la probabilidad de que la sección del cable esté entre 0'2 y 0'5 mm

$F(0'5) - F(0'2) = 0'4$

d) ¿Qué sección tiene el cable por término medio?

La esperanza:

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 6(x^2 - x^3)\, dx$$

$$= \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{6x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{6}{3} - \frac{6}{4} = \frac{1}{2}$$

8. La velocidad de una molécula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria V cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot v e^{-3v^2} & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) Halla el valor de K

k tiene que ser positivo y además el área total debajo de la curva ha de ser 1:

$$\int_0^{\infty} kve^{-3v^2}dx = \left[-\frac{k}{6}e^{-3v^2}\right]_0^{\infty} = \frac{k}{6}$$

$$= 1 \iff K = 6$$

b) Obtener la función de distribución de la energía cinética W de una molécula de masa 2 u.m.a.

$$W = \frac{1}{2}m \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot V^2 = V^2$$

$$P(W \leq w) = P(V^2 \leq w) = P(|V| \leq \sqrt{w})$$

$$= \int_0^{\sqrt{w}} 6\,ve^{-3v^2}dx = \left[-e^{-3v^2}\right]_0^{\sqrt{w}} = 1 - e^{-3w}$$

$(w > 0)$

c) ¿Qué tipo de distribución sigue W?
$(W = \frac{1}{2}m \cdot V^2$, si m es la masa de la molécula)

Corresponde al modelo exponencial de parámetro 3

(media $1/3$)

9. Al imprimir una hoja en una impresora

1. Al imprimir una hoja en una impresora, la probabilidad de que se produzca un fallo en el arrastre del papel es de 0'02, con independencia de lo que hubiera ocurrido en las hojas anteriores. Binomial

a) Calcula la probabilidad de que no haya ningún fallo en las próximas 10 hojas.

$X \rightsquigarrow B(10, 0'02)$; $P(X=0) = 0'98^{10}$

b) Calcula la probabilidad de que haya más de dos fallos en las próximas 20 hojas.

$X \rightsquigarrow B(30, 0'02)$

$P(1 \leq X \leq 3) = \binom{30}{1} \cdot 0'02 \cdot 0'98^{29} + \binom{30}{2} \cdot 0'02^{2} \cdot 0'98^{28} + \binom{30}{3} \cdot 0'02^{3} \cdot 0'98^{27}$

$= 0'45$

c) Calcula la probabilidad de que haya entre uno y tres fallos (ambos inclusives) en las próximas 30 hojas.

La esperanza de una variable binomial con $n = 300$ y $p = 0'02$: $300 \cdot 0'02 = 6$

10.
Una persona recibe por término medio 5 llamadas diarias en su teléfono móvil.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día no reciba ninguna llamada?

$X \rightsquigarrow P(5)$; $P(X=0) = e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!} = e^{-5} = 0'0067$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un día reciba entre 3 y 6 llamadas, ambos inclusive?

$P(3 \leq X \leq 6) = e^{-5} \cdot \frac{5^3}{3!} + e^{-5} \cdot \frac{5^4}{4!} + e^{-5} \cdot \frac{5^5}{5!}$
$+ e^{-5} \cdot \frac{5^6}{6!} = e^{-5} \cdot (20'83 + 26'05 + 26'05 + 21'70)$

$= 0'64$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un día reciba más de 2 llamadas?

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$
$- P(X=2) = 1 - e^{-5} \cdot \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} \right)$

$$= 1 - e^{-5} \cdot (1 + 5 + 12'5) = 0'875$$

11.
Supongamos que la ocurrencia de determinada clase de sucesos se rige por una distribución de Poisson de parámetro λ. Sea la variable aleatoria T = "tiempo entre dos sucesos consecutivos". Obten la función de densidad de T. ¿A qué modelo corresponde?

Primero hallamos la función de distribución:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(Y=0)$$

donde Y es una variable con distribución de Poisson de parámetro λt. Entonces:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

La función de densidad es la derivada:

$$f(t) = F'(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0)$$

12. La duración de ciertos elementos

sigue una distribución exponencial con media 8 meses.

a) Calcula la probabilidad de que un elemento tenga una vida entre 3 y 12 meses.

Si la media es 8, el parámetro de la distribución es $\lambda = 1/8$.

Mediante la función de distribución:

$$P(3 < X \leq 12) = F(12) - F(3)$$

$$= 1 - e^{-12/8} - (1 - e^{-3/8}) = e^{-3/8} - e^{-12/8} = 0'46$$

b) Halla el percentil 95 de la distribución

Es un número c tal que $P(X \leq c) = 0'95$, es decir $F(c) = 0'95$:

$$F(c) = 1 - e^{-c/8} = 0'95 \Leftrightarrow 1 - 0'95 = e^{-c/8} \Leftrightarrow 0'05$$

$$= e^{-c/8} \Leftrightarrow \ln(0'05) = -\frac{c}{8} \Leftrightarrow c =$$

$$= -8 \cdot \ln(0'05) = 8 \cdot 2'996 = 23'97$$

Podemos interpretar que el 95% de esos elementos duran menos de 23'97 meses.

c) Halla la probabilidad de que un elemento que ya ha durado más de 10 meses dure más de 25.

$$P(X>25 \mid X>10) = \frac{P(X>25 \cap X>10)}{P(X>10)}$$

$$= \frac{P(X>25)}{P(X>10)} = \frac{e^{-25/8}}{e^{-10/8}} = e^{-15/8} = 0'15$$