5. El lado de un cuadrado es una variable aleatoria X con distribución U(0,3). Sea Y el área del cuadrado.

(a) Construye la función de densidad de Y.

$P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}}{3}$ por ser $X \sim U[0,3]$

Función de distribución de Y: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \frac{\sqrt{y}}{3}$

Función de densidad de Y: $f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2}$ para $y \in [0,9]$

(Si $x \in [0,3]$, entonces $x^2 \in [0,9]$)

(b) Calcula la probabilidad de que el área sea menor que 4.

$P(Y \leq 4) = P(X^2 \leq 4) = P(X \leq 2) = \frac{2}{3}$

$(X \in [0,3])$

(c) Calcula la esperanza de Y.

$EY = E(X^2) = \int_0^3 x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{3}\, dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_0^3 = \frac{3^3}{9} = 3$

(d) Calcula la mediana de Y.

Buscamos M_Y / $P(Y \leq M_Y) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = P(Y \leq M_Y) = P(X^2 \leq M_Y) = P(X \leq \sqrt{M_Y}) \Rightarrow \sqrt{M_Y} = M_X$

La mediana de X es $M_X = \frac{3}{2}$ por ser $X \sim U[0,3]$,

luego $\sqrt{M_Y} = \frac{3}{2} \Rightarrow M_Y = \frac{9}{4}$.

6. El número de irregularidades en una bovina de hilo se distribuye según el modelo de Poisson con media 2 por metro.

(a) Calcula la probabilidad de que en un trozo de 1 metro haya menos de 2 irregularidades.

$X \sim \mathcal{P}(2)$

$P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-2} \frac{2^0}{0!} + e^{-2} \frac{2^1}{1!} =$

$= e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2}$

(b) Calcula la probabilidad de que en un trozo de 2 metros no haya ninguna irregularidad.

Y: número de irregularidades en un trozo de 2m; $Y \to \mathcal{P}(4)$

$P(Y=0) = e^{-4} \frac{4^0}{0!} = e^{-4}$

(c) ¿Cuál es la distancia media entre dos irregularidades?

La distancia sigue el modelo exponencial de parámetro 2; su esperanza es 1/2.

7. Se adjunta una muestra de tiempos de carga (segundos) de una página web. Suponiendo que estos tiempos se distribuyen según el modelo normal, construye de manera razonada un intervalo de confianza de probabilidad 0,95 para la varianza del tiempo de carga basado en estas observaciones.

4,3
4,6
5,1
3,4
4,2
3,7
4,0
4,5
$\bar{x} =$ 4,23
$\hat{s} =$ 0,53

$$J = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$$

$$P(j_{0,025} < J < j_{0,975}) = 0,95$$

$$P\left(j_{0,025} < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} < j_{0,975}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{1}{j_{0,975}} > \frac{\sigma^2}{(n-1)\hat{s}^2} > \frac{1}{j_{0,025}}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{(n-1)\hat{s}^2}{j_{0,975}} > \sigma^2 > \frac{(n-1)\hat{s}^2}{j_{0,025}}\right) = 0,95$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(n-1)\hat{s}^2}{j^{(7)}_{0,025}} = \dfrac{7\cdot 0,53^2}{1,690} = 0,125 \\[2ex] \dfrac{(n-1)\hat{s}^2}{j^{(7)}_{0,975}} = \dfrac{7\cdot 0,53^2}{16,013} = 1,181 \end{array}\right\} \text{Intervalo: } (0,125 \,;\, 1,181)$$

5. Se supone que el contenido en materia grasa de un yogur natural sigue una distribución normal. En una muestra de 12 yogures se ha observado una media muestral de 2,64 y una desviación típica muestral de 0,12 (medido en gramos de materia grasa por cada 100 gramos de yogur).

(a) Plantea el contraste de hipótesis adecuado para establecer si la media de la distribución es mayor que 2,6.

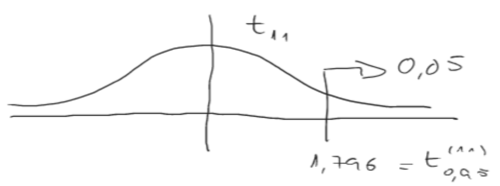
$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 2,6 \\ H_1: \mu > 2,6 \end{array}\right\} \text{Nivel: } \alpha = 0,05$$

(b) Calcula el estadístico de contraste. ¿Cuál es su distribución bajo la hipótesis nula?

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} = \frac{2,64 - 2,6}{\hat{s}/\sqrt{12}} = 1,15$$

$T \overset{H_0}{\rightsquigarrow} t_{n-1}$, en nuestro caso t_{11}.

(c) Resuelve el contraste mediante la región crítica.



$C = [1,796 \,;\, \infty)$

$T_{obs} = 1,15 \notin C$

NO R H_0

6. Para estudiar la influencia de dos compuestos en el peso de tomates cherry se experimenta en cuatro invernaderos (1, 2, 3 y 4), disponiendo tres bancales en cada invernadero, uno de control (C) y dos con los compuestos A y B. La variable respuesta es el peso medio observado en cada bancal (gramos).

Variabilidad entre compuestos: 0,76
Variabilidad entre invernaderos: 0,31
Variabilidad residual: 0,16

		Compuesto		
		A	B	C
Invernadero	1	13,5	13,4	12,9
	2	12,8	13,2	12,5
	3	13,2	13,5	12,6
	4	13	13,1	12,8

(a) Describe el modelo adecuado para el análisis.
Análisis de la varianza con un factor (compuestos, 3 niveles) y una variable bloque (invernaderos, 4 niveles).

(b) Construye la tabla de análisis de la varianza.

Fuente	**SC**	**g.lib**	**SCM**	**F**
Compuestos	0,76	*2*	*0,38*	*14,25*
Invernaderos	0,31	*3*	*0,103*	*3,875*
Residual	0,16	*6*	*0,027*	
Total	*1,23*	*11*		

(c) Plantea y resuelve los contrastes de hipótesis sobre los efectos que se puedan determinar.

Contraste sobre el efecto de los compuestos:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \\ H_1: \exists i / \alpha_i \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} Y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+u_{ij} \\ \text{Nivel } 0{,}05 \end{array}$$

$F_{comp}=14{,}25$; distribución bajo H_0: $F_{2,6}$

$f_{0{,}05}^{(2,6)}=5{,}143$; $C=[5{,}143;\infty)$

$F_{comp}=14{,}25 \in C \Rightarrow R\ H_0$

Hay diferencias significativas entre los efectos de los compuestos.

Contraste sobre el efecto de los invernaderos:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0 \\ H_1: \exists j / \beta_j \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} Y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+u_{ij} \\ \text{Nivel } 0{,}05 \end{array}$$

$F_{inv}=3{,}875$; distribución bajo H_0: $F_{3,6}$

$f_{0{,}05}^{(3,6)}=4{,}757$; $C=[4{,}757,\infty)$

$F_{inv}=3{,}875 \notin C \Rightarrow$ no $R\ H_0$

No hay diferencias significativas entre los efectos de los invernaderos.

7. Sean $\{(x_i,y_i)\}$ 8 pares de observaciones correspondientes a las variables X, Y. Se desea construir la recta de regresión de Y sobre X basada en esos datos.Hemos calculado:

	X	Y
Medias	7	18,7
Varianzas	5,8	32,3
Covarianza	13,3	

(a) Calcula los coeficientes de la recta de regresión.

Pendiente: $\hat{b}=\dfrac{S_{XY}}{S_{XX}}=\dfrac{13{,}3}{5{,}8}=2{,}293$

Ordenada en el origen: $\hat{a}=\bar{Y}-\hat{b}\bar{X}=18{,}7-2{,}293\cdot 7=2{,}648$

(b) Calcula el coeficiente de correlación lineal.

$$r_{XY}=\frac{S_{XY}}{S_X S_Y}=\frac{13{,}3}{\sqrt{5{,}8\cdot 32{,}3}}=0{,}972$$

(c) Calcula e interpreta el coeficiente de determinación.

$R^2=r_{XY}^2=0{,}972^2=0{,}944$

El modelo de regresión explica el 94,4% de la variabilidad de la Y.