Examen Ordenador: Optimización

Page • 1 enlace entrante • Tag

Tema 5.pdf 811.76KB

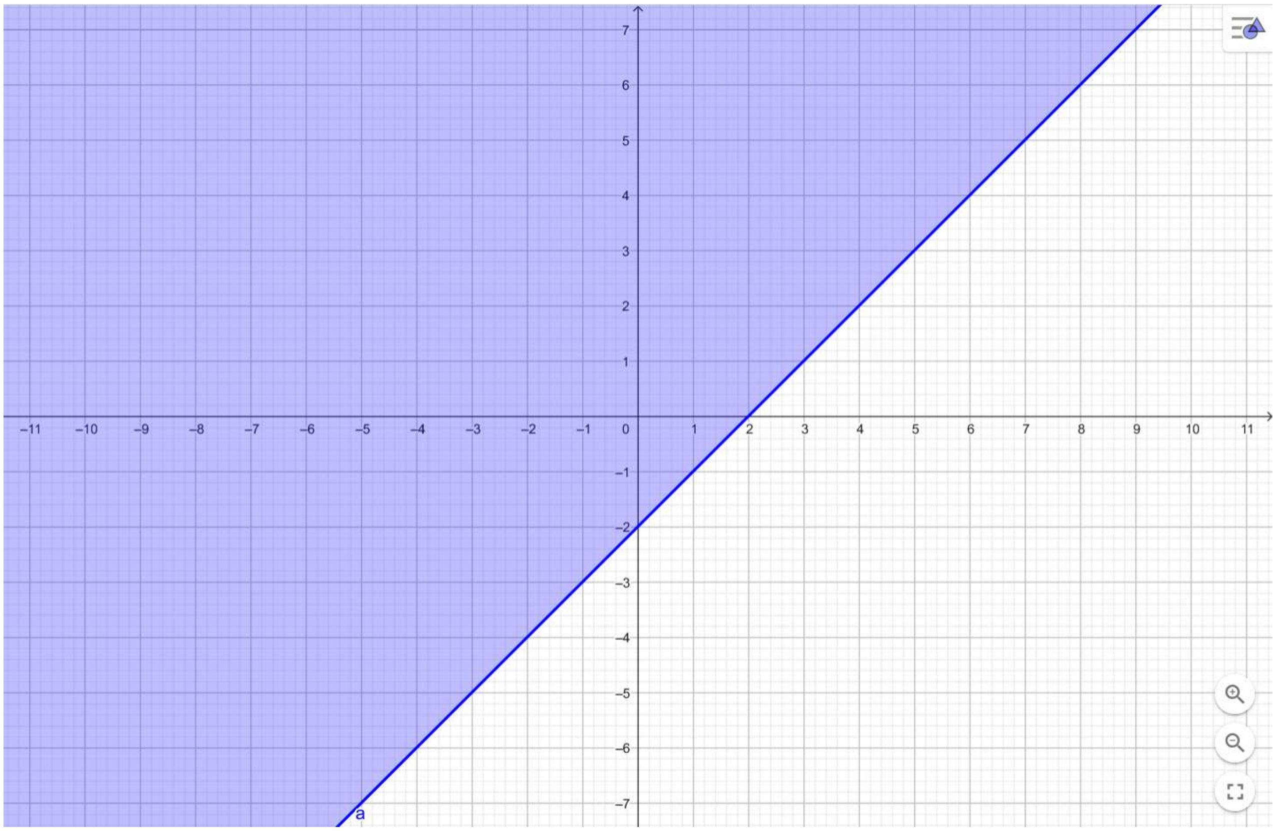
Tema 5: Introducción a la programación lineal

Ejercicio 1

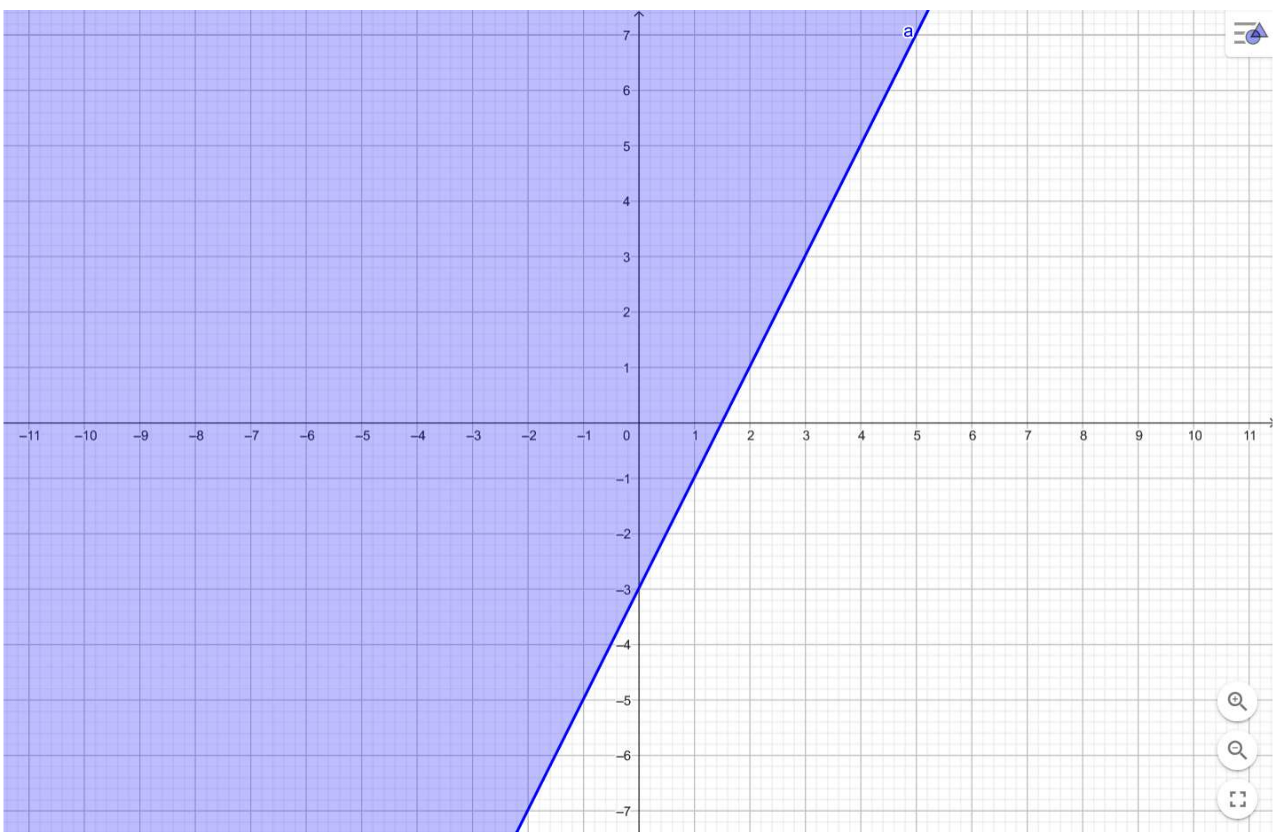
> Maximizar $z = f(x,y) = 2 \cdot x - y$ sujeto a:
>
> $x - y \leq 2 \rightarrow x - y = 2 \rightarrow y = x - 2$
>
> $2 \cdot x - y \leq 3 \rightarrow y = 2 \cdot x - 3$
>
> $x, y \geq 0$

Vamos a utilizar Geogebra para ver la Región factible de cada una de las funciones:

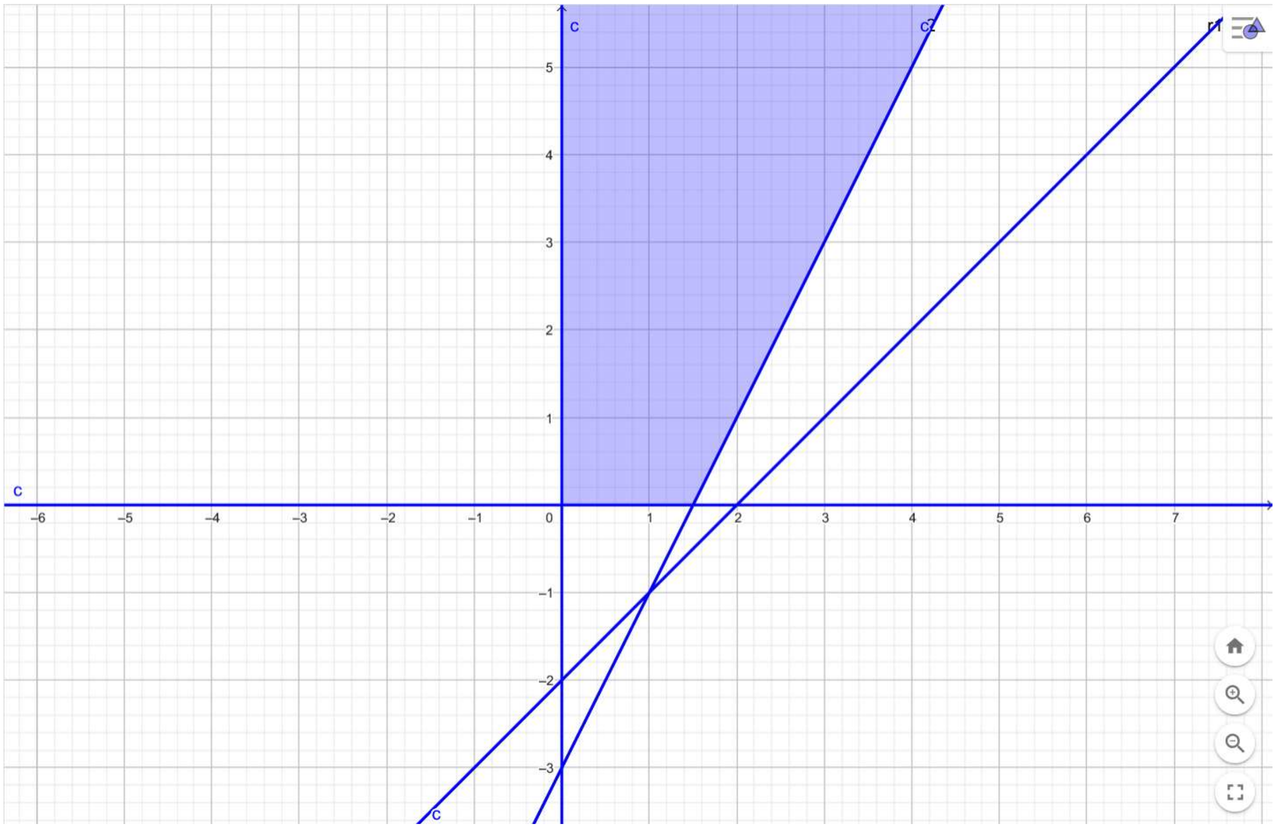
- $x - y \leq 2$



- $2 \cdot x - y \leq 3$



Introducimos $c : x - y \leq 2 \wedge 2x - y \leq 3 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$ en Geogebra para que el programa muestre la región factible acotada por ambas funciones. La región común y que cumpla la condición a la que está sujeta de $x, y \geq 0$.



Ahora utilizaremos la función de Geogebra que nos permite crear un slider para poder modificar un valor de manera sencilla.

Para poder encontrar el vértice correcto de la región deberemos crear una función auxiliar que utilizará la función a maximizar igualada al valor del slider.

Con esta función buscaremos modificar el slider hasta que cruce en uno de los vértices buscando el máximo:

$$f : 2x - 3y = 3$$

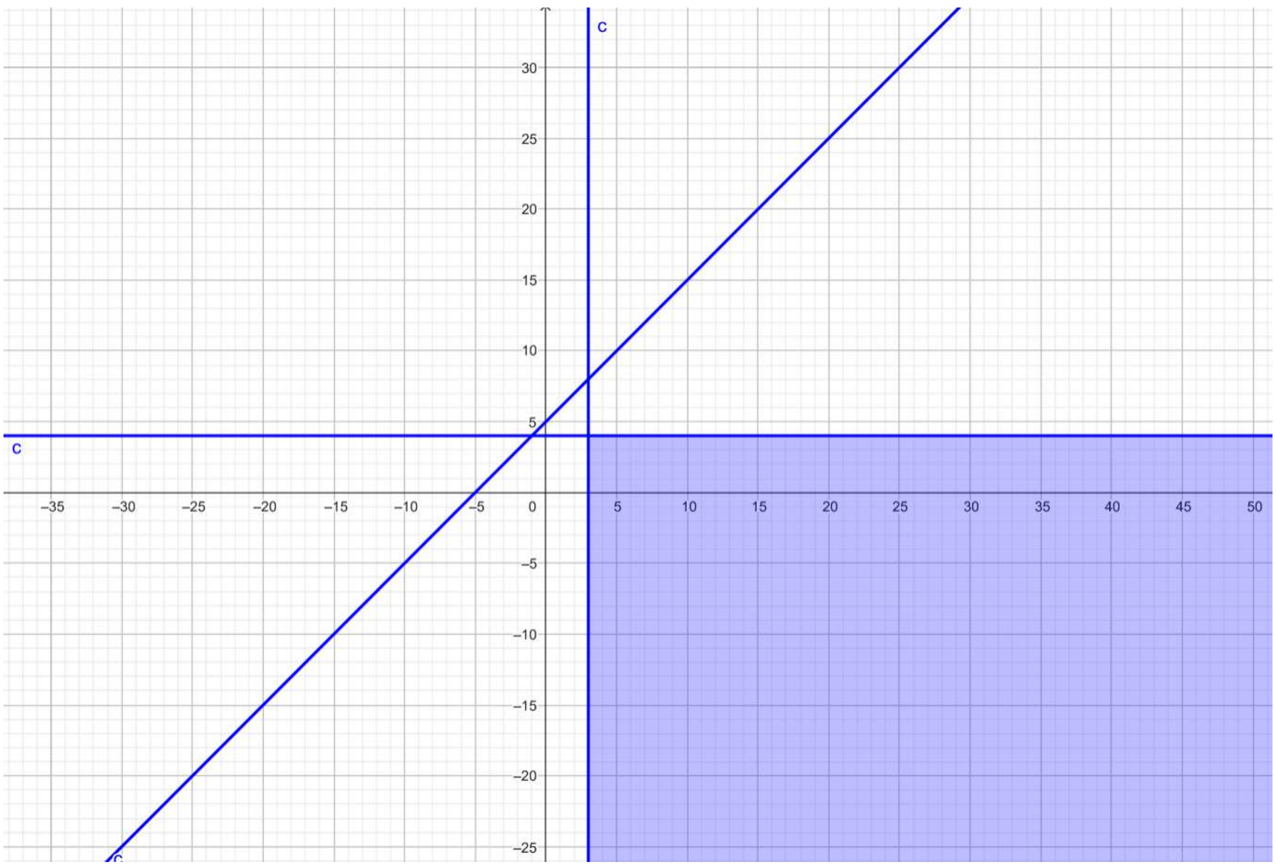
Vértice	z=2x−yz = 2x - y
$(1.5, 0)$	$2(1.5) - 0 = 32(1.5) - 0 = 3$

La solución, el vértice factible y que nos permite obtener el máximo es: $x = 1.5, y = 0$

Ejercicio 2b

> Maximizar $z = f(x, y) = 2 \cdot x - 3 \cdot y$ sujeto a:
>
> $x \geq 3$
>
> $y \leq 4$
>
> $x - y \geq -5$

Introducimos $c : x \geq 3 \wedge y \leq 4 \wedge x - y \geq -5$ en Geogebra para que el programa muestre la región factible acotada por ambas funciones. La región común y que cumpla la condición a la que está sujeta de $x - y \geq -5$.



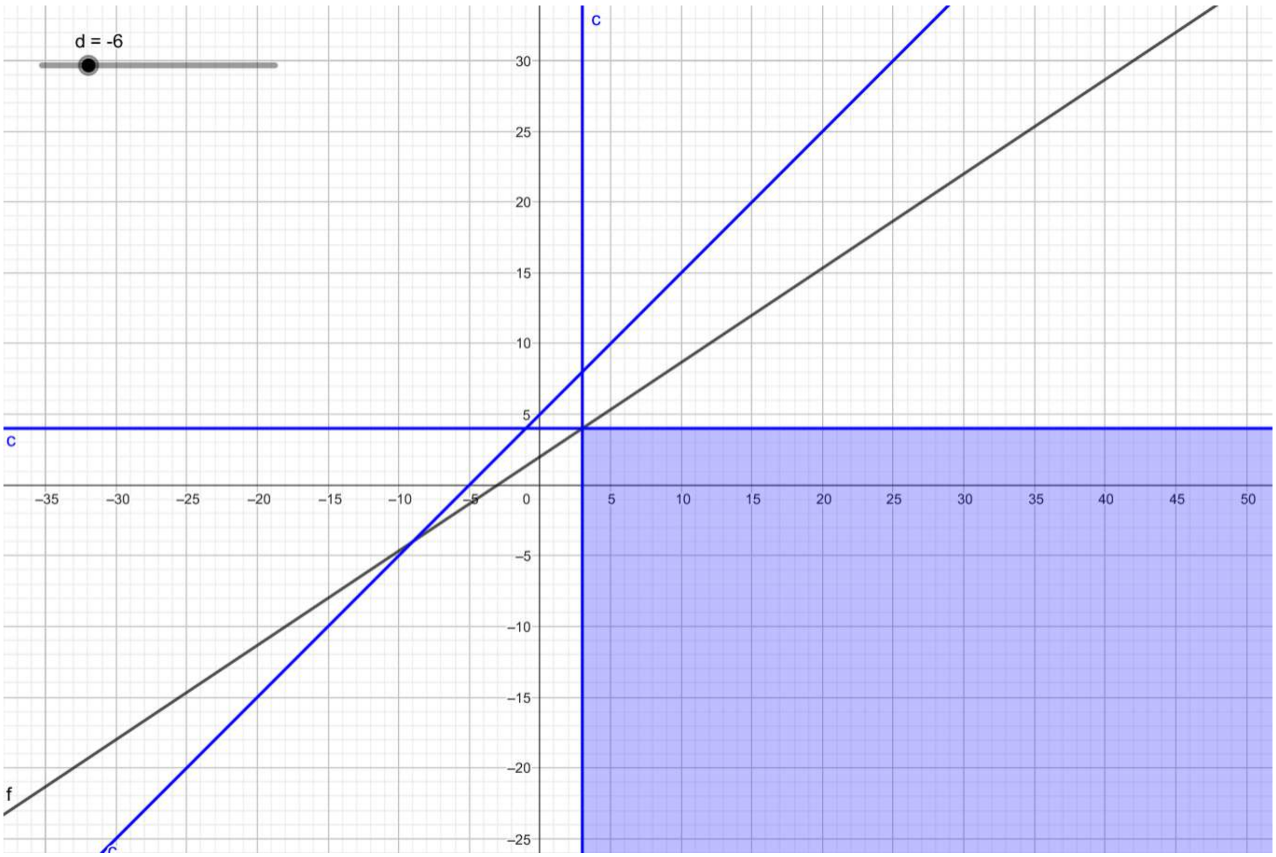
Ahora utilizaremos la función de Geogebra que nos permite crear un slider para poder modificar un valor de manera sencilla.

Para poder encontrar el vértice correcto de la región deberemos crear una función auxiliar que utilizará la función a maximizar igualada al valor del slider.

Con esta función buscaremos modificar el slider hasta que cruce en uno de los vértices buscando el máximo:

$$f : 2x - 3y = -6$$

Una vez situada la recta cortando con el vértice, obtenemos el máximo de la función.



La solución, el vértice factible y que nos permite obtener el máximo es: $x = 3, y = 4$

Ejercicio 3

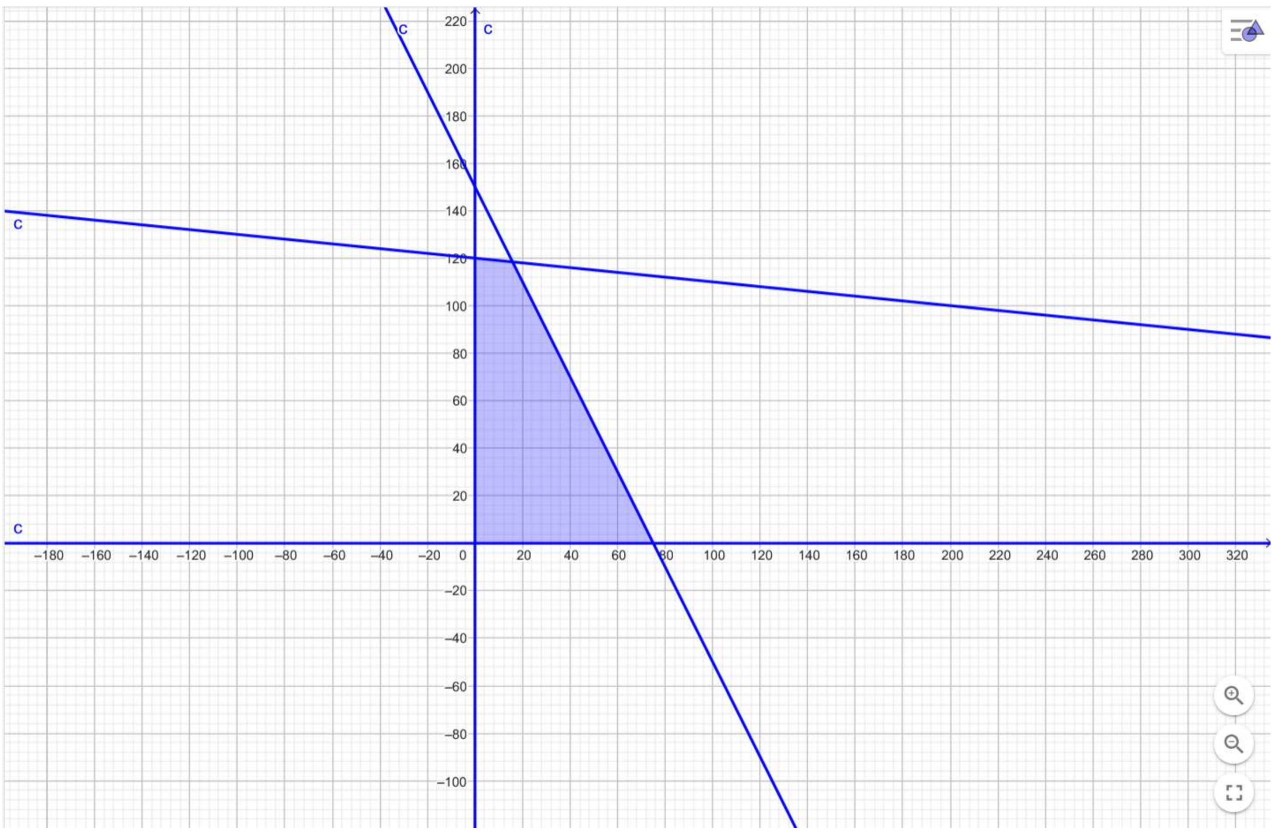
Tropical	Carne	Almacen
1€	2€	
4€	2€	300€
1/2€	5€	600€

> Maximizar $z = x_1 + 2x_2$ sujeto a:

> $4 \cdot x + 2 \cdot y \leq 300$
>
> $0.5 \cdot x + 5 \cdot y \leq 600$
>
> $x,y \geq 0 $

- Masa limitada: $4 \cdot x + 2 \cdot y \leq 300$
- Carne limitada: $0.5 \cdot x + 5 \cdot y \leq 600$
- $x, y \geq 0$

Introducimos $c : 4x + 2y \leq 300 \wedge 0.5x + 5y \leq 600 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$ en Geogebra para que el programa muestre la región factible acotada por ambas funciones. La región común y que cumpla la condición a la que está sujeta de $x, y \geq 0$.



Definiremos las dos funciones como r_1 y r_2:

$r1: 4x + 2y = 300$

$r2: 0.5x + 5y = 600$

$f(x, y) = x + 2y$

$A = \text{Interseca}(r1, r2)$

$= (15.79, 118.42)$

Y obtenemos el punto de intersección entre ambas, en este caso:

$$(15.79, 118.42)$$

Y a continuación sustituiremos el punto de intresección en la función $f(x.y)$:

$$a = f(A) = 252.63$$

$a = f(A)$

$= 252.63$

Este es el punto máximo de la función.

Podemos comparar con el resto de vértices de la función y verificar si existe uno mayor:

Vértice	z=x+yz = x + y
$(0, 120)$	120
$(75, 0)$	75
$(15.79, 118.42)$	**134.21**

Dado que la solución es: $x = 15.79, y = 118.42$

El nº de pizzas tropicales máximo es $15.79 \approx 16$

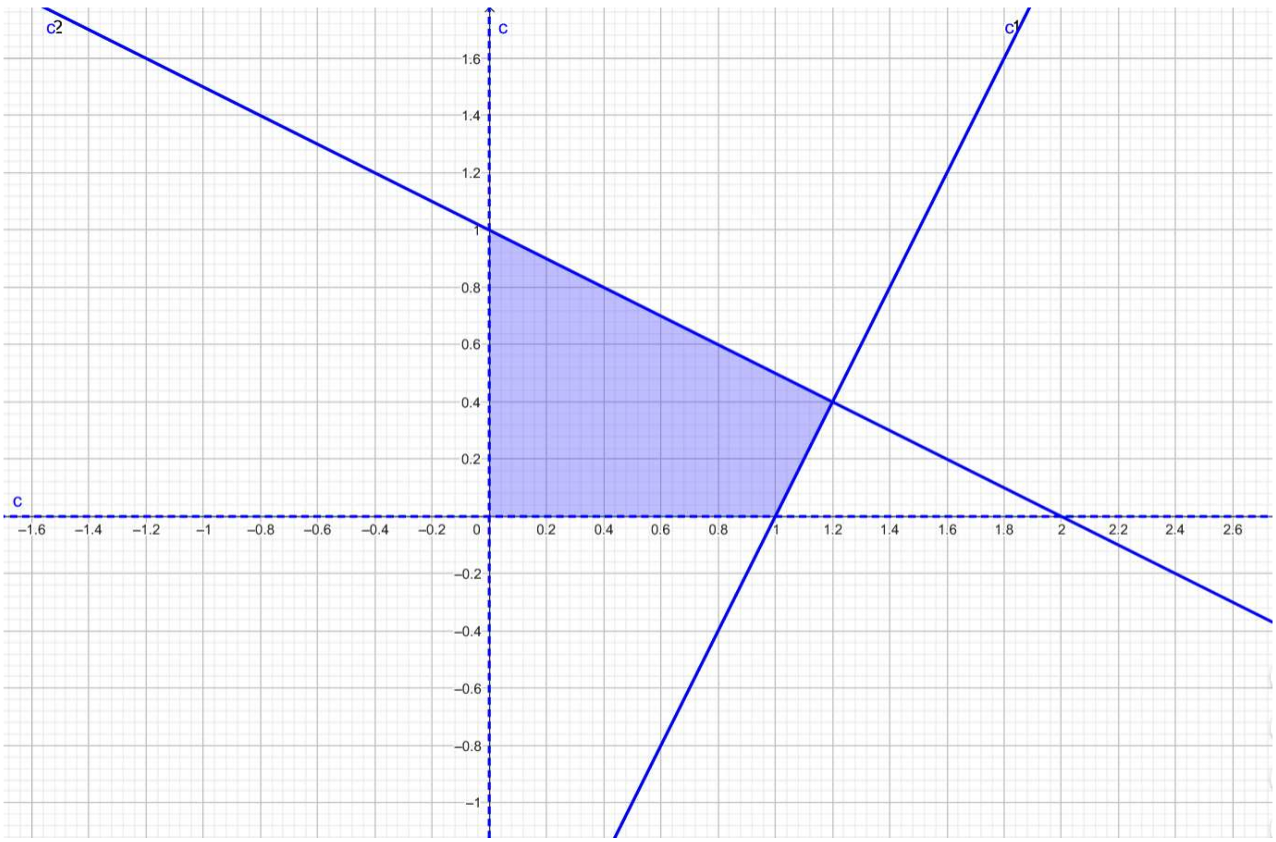
El nº de pizzas de carne máximo es $118.42 \approx 118$

Ejercicio 7

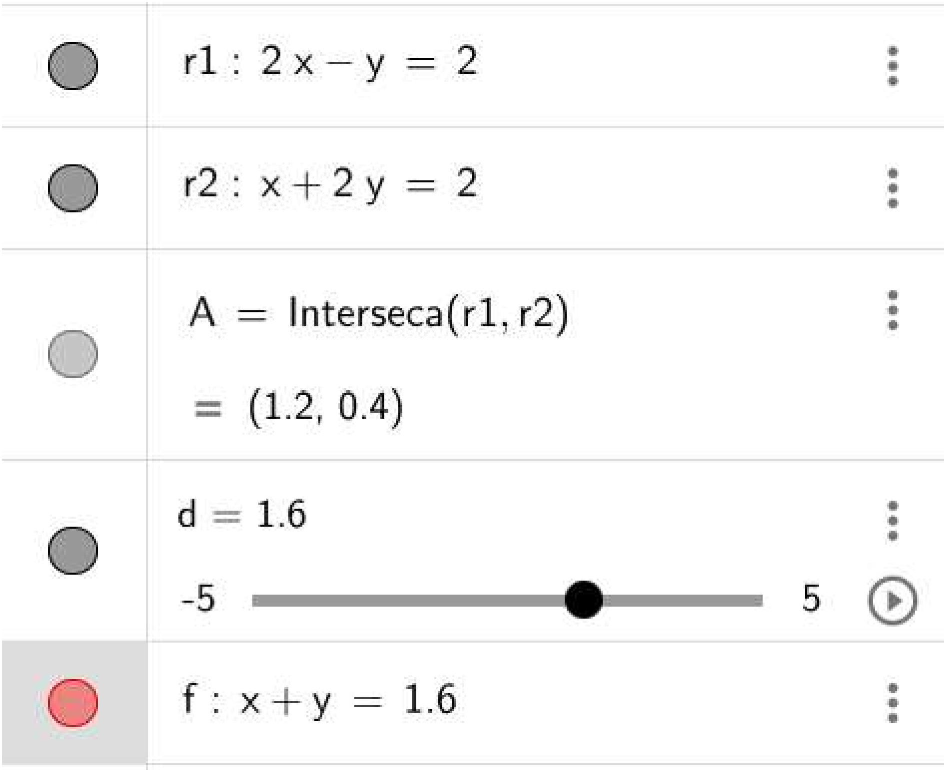
Forma canónica

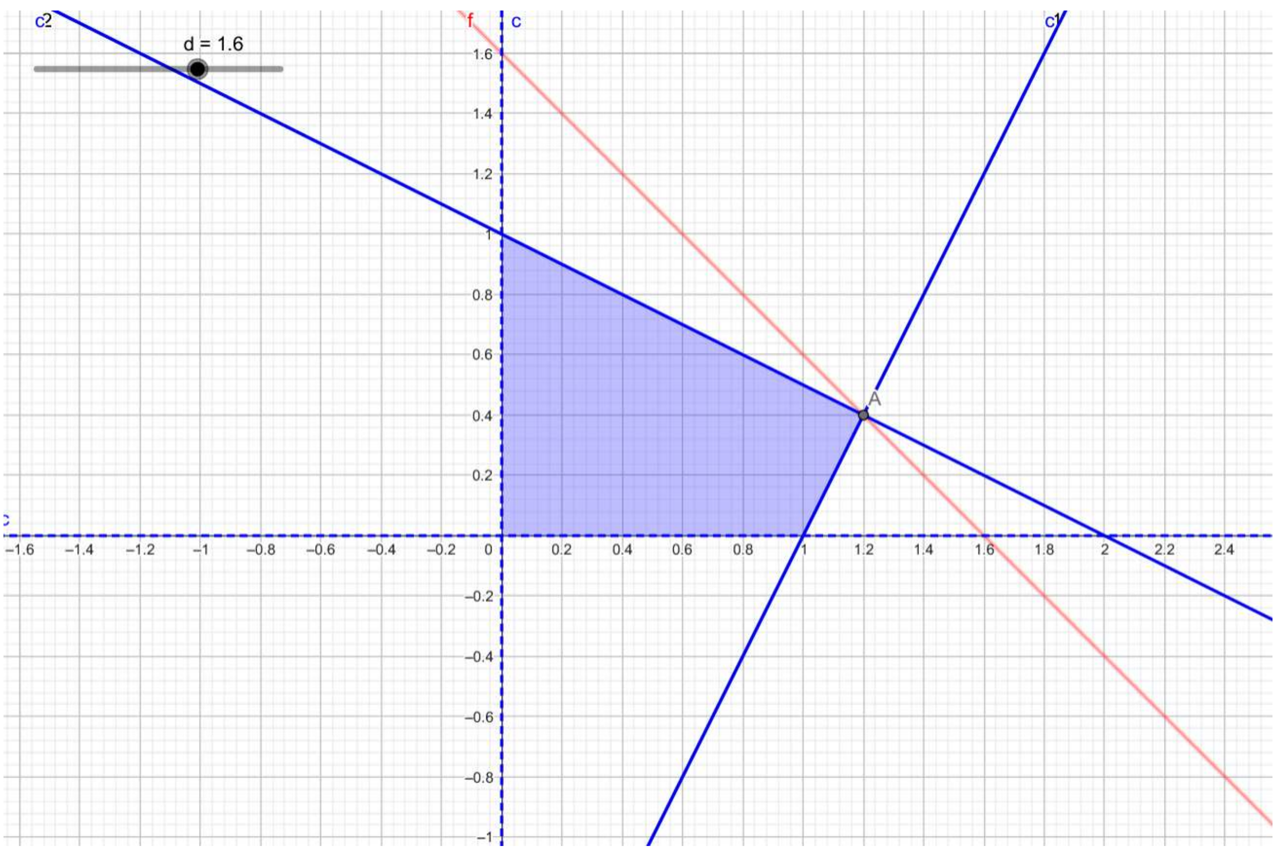
> Maximizar $z = x_1 + x_2$ sujeto a:
>
> $2 \cdot x_1 - x_2 \leq 2$
>
> $x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 2$
>
> $x_1,x_2 \geq 0 $

Introducimos $c : 2x - y \leq 2 \wedge x + 2y \leq 2 \wedge x > 0 \wedge y > 0$ en Geogebra para que el programa muestre la región factible acotada por ambas funciones. La región común y que cumpla la condición a la que está sujeta de $x, y \geq 0$.



Mediante el uso de una recta auxiliar calculamos el máximo tal como hemos hecho en los anteriores ejercicios:





La solución máxima en este caso es el vértice factible de: $\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Por lo tanto el valor máximo de z es igual a: 1.6

Método Alternativo (Ejercicio 7)

Forma estándar

> Maximizar $z = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$ sujeto a:
>
> $2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 2$
>
> $x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 2$
>
> $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Debemos colocar las funciones del ejercicio en forma de sistema matricial y resolver el sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se trata de un Sistema Compatible Indeterminado que contará con $4 - 2 = 2$ parámetros

A continuación debemos comprobar de cuantas formas podemos escoger los parámetros:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Habrá 6 formas diferentes de escoger los parámetros: $1, 2 \mid 1, 3 \mid 1, 4 \mid 2, 3 \mid 2, 4 \mid 3, 4$

- Empezamos con la primera combinación $(1, 2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Para cada una de las 6 formas de escoger los parámetros hacemos que esos parámetros sean iguales a 0 y resolvemos.

$x_3 = x_4 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{2}{5}$

Debemos asegurarnos que todas las $x_i \geq 0$. Si esto se cumple son **soluciones factibles**.

Calculamos $Z(B) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix} = \frac{8}{5}$

Continuamos comprobando el resto de posibilidades:

- Segunda combinación $(1, 3)$:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2 \\ x_4\end{pmatrix}$$

$x_2 = x_4 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_3 = -2$

Dado que en este caso existe una $x_i < 0$ esta solución no es factible.

- Tercera combinación $(1, 4)$:

$$\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \\ 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 1 \\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2 \\ x_3\end{pmatrix}$$

$x_2 = x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_4 = 1$

Todas las $x_i \geq 0$. Por lo tanto es una solución factible.

Calculamos $Z(C) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix} = 1$

La solución es menor a la de la primera forma, por lo tanto no es el máximo que buscamos.

Se deberían comprobar el resto de formas y comprobar cuál es el valor máximo obtenido siendo ese la solución.

Ejercicio 6

Forma canónica

> Maximizar $z = 40x + 20y$ sujeto a:
>
> $x \geq 4$
>
> $2 \cdot y \leq 10$
>
> $x, y \geq 0$

Forma estándar

> Maximizar $z = 40x + 20y + 0z + 0w$ sujeto a:
>
> $x + z = 4$
>
> $2 \cdot y + w = 10$
>
> $x, y, z, w \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Habrá 6 formas diferentes de escoger los parámetros: $1,2 \mid 1,3 \mid 1,4 \mid 2,3 \mid 2,4 \mid 3,4$

- Empezamos con la primera combinación $(1,2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$z = w = 0 \to x = 4, y = 5$

Calculamos $Z(B) = \begin{pmatrix} 40 \; 20 \; 0 \; 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 260$

- Segunda combinación $(1,3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$$

$y = w = 0 \to Sin\ Solución$

- Tercera combinación $(1,4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$y = z = 0 \rightarrow x = 4, w = 10$

Calculamos $Z(B) = \begin{pmatrix} 40 \ 20 \ 0 \ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 160$

- Cuarta combinación $(2, 3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$$

$y = z = 0 \rightarrow y = 5, z = 4$

Calculamos $Z(B) = \begin{pmatrix} 40 \ 20 \ 0 \ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 100$

- Quinta combinación $(2, 4)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

$y = w = 0 \rightarrow Sin\ Solución$

- Sexta combinación $(3, 4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x = y = 0 \rightarrow z = 4, w = 10$

Calculamos $Z(B) = \begin{pmatrix} 40 \ 20 \ 0 \ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$

> El máximo es la primera combinación: $(1, 2)$
>
> $z = 260$

Ejercicio 8

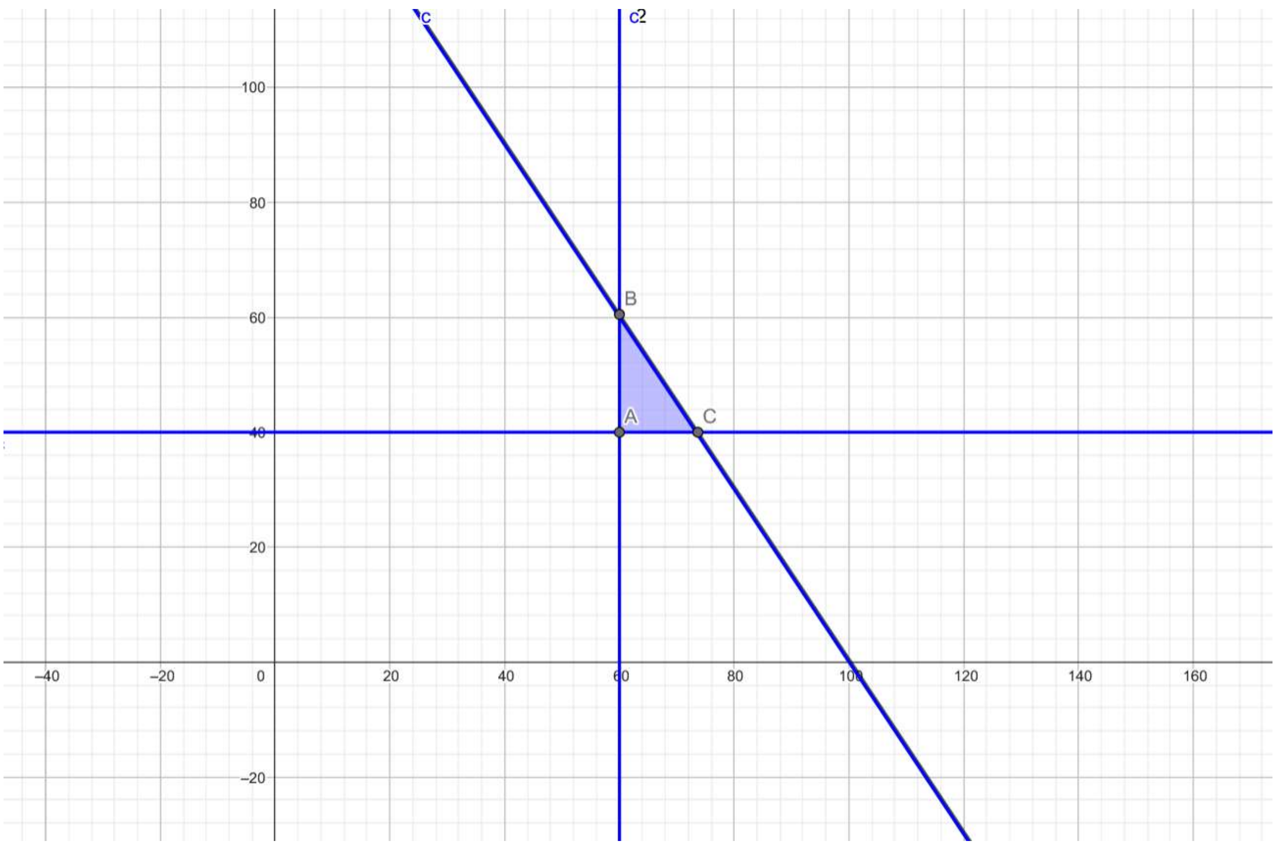
Torre	Portatil	Almacen
30	20	
24	16	2400
60	40	

x= Nº de torres

y= Nº de portátiles

Forma canónica

> Maximizar $z = 30x + 20y$ sujeto a:
>
> $24x + 16y \leq 2400$
>
> $x \geq 60$, $y \geq 40$



> Maximizar $z = 30x + 30y$ sujeto a:
>
> $24x + 16y + z = 2400$
>
> $x + w = 60$

$y + t = 40$

$$\begin{pmatrix} 24 & 16 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$$

Habrá 10 formas diferentes de escoger los parámetros: $1,2 \mid 1,3 \mid 1,4 \mid 1,5 \mid 2,3 \mid 2,4 \mid 2,5 \mid 3,4 \mid 3,5 \mid 4,5$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$