EXAMEN C-1 DE MÉTODOS NUMÉRICOS (PARCIAL) (26/04/2024)

TODOS LOS CÁLCULOS DEBEN REDONDEARSE A 2 DECIMALES

1. Teoría y cuestiones

a) Quiero encontrar una aproximación, *c*, a la solución, α, de la ecuación $e^x + (x-2)^3 = 0$ en el intervalo $I = [0,2]$ usando el método de la secante. ¿Qué número tengo que usar como criterio de parada, *tol*, para garantizar $|c-\alpha| < 10^{-3}$? **(1 punto)**

b) La descomposición LU de cierta matriz, A, es $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$ Resuelve el sistema $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ SIN CALCULAR PREVIAMENTE LA MATRIZ *A*. **(2 puntos)**

c) Haz una iteración del método de Gauss-Seidel, usando como iterante inicial $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, para resolver el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(1 punto)**

d) Halla el mínimo número de subintervalos para que el error al usar interpolación lineal segmentaria de la función $f(x) = x^4$ en el intervalo $[-1.5, 0]$ sea menor que 10^{-2}.

Nota: Cota del error $C = \dfrac{h^2}{8} M_2$. $f^{2)}(x) = 12x^2$. **(1 punto)**

Problemas

2. Dada la función $f(x) = xLn(x)$

a) Halla el polinomio interpolador global en forma de Hermite de $f(x)$ utilizando los datos $\{f(1), f'(1), f''(1), f(2)\}$.

b) Encuentra la cota del error del polinomio del apartado a) en x=0.5

c) Halla el polinomio interpolador lineal segmentario considerando los datos {1,2,4} y aproxima el valor de $f(2.5)$.

d) Halla una cota del error del interpolante hallado en c) en $[1,4]$

Nota: $C(x^*) = \left| \dfrac{(x^* - x_0)^{m_0+1} \ldots (x^* - x_r)^{m_r+1}}{(n+1)!} \right| \mathrm{M}_{n+1}$ $\qquad C = \dfrac{h^2}{8} M_2$ **(3 puntos)**

3. Dada la función $f(x) = x^3 + \sin(x) - 1$ **(2 puntos)**

a) Busca un intervalo de longitud 1 y extremos números enteros que contenga a su única raíz.

b) Haz una iteración del método de Bisección en el intervalo encontrado en **a)**.

c) Haz una iteración del método de Newton con $x_0 = 0$

d) Haz una iteración del método de la secante con $x_0 = 0$; $x_1 = 0.5$.

1. Teoría y cuestiones

a) Quiero encontrar una aproximación, *c*, a la solución, α, de la ecuación $e^x + (x-2)^3 = 0$ en el intervalo $I = [0,2]$ usando el método de la secante. ¿Qué número tengo que usar como criterio de parada, *tol*, para garantizar $|c-\alpha| < 10^{-3}$? **(1 punto)**

b) La descomposición LU de cierta matriz, A, es $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$ Resuelve el sistema $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ SIN CALCULAR PREVIAMENTE LA MATRIZ *A.* **(2 puntos)**

c) Haz una iteración del método de Gauss-Seidel, usando como iterante inicial $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, para resolver el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(1 punto)**

d) Halla el mínimo número de subintervalos para que el error al usar interpolación lineal segmentaria de la función $f(x) = x^4$ en el intervalo $[-1.5, 0]$ sea menor que 10^{-2}.

Nota: Cota del error $C = \frac{h^2}{8} M_2$. $f^{2)}(x) = 12x^2$. **(1 punto)**

SOLUCIÓN:

a)

$$f(x) = e^x + (x-2)^3 \Rightarrow f'(x) = e^x + 3(x-2)^2$$
$$|f'(x)| = e^x + 3(x-2)^2 \text{ ; } \min_{[0,2]} |f'(1.3543)| \approx 5.12$$

Si usamos $tol = 5.12 \cdot 10^{-3}$, Tendremos $|c-\alpha| < \frac{|f(c)|}{5.12} < 10^{-3}$ usando el Teorema general de acotación del error.

b) Primero modificamos el término independiente como indica L

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - (-2)F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

A continuación, resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=2 \\ 2y-z=-3 \\ -11z=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow z=1\,;\; y=-1\,;\; x=1$$

Solución: $x=1\,;\; y=-1\,;\; z=1$

c)

$$x=\frac{1-y-2z}{1}$$
$$y=\frac{2-2x-3z}{4}$$
$$z=\frac{-1-5x-y}{1}$$

y hacemos la iteración $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1-1-2\cdot 0}{1}=0 \\ y=\dfrac{2-2\cdot 0-3\cdot 0}{4}=0.5 \\ z=\dfrac{-1-5\cdot 0-0.5}{1}=-1.5 \end{array}\right\} \Rightarrow X^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$

d) $\max\limits_{[-1.5,0]}\left|f^{2)}(x)\right| = \max\limits_{[-1.5,0]}\left|12x^2\right| = 12\cdot(-1.5)^2 = 27$

$$\frac{h^2}{8}27<10^{-2} \Rightarrow h=0.05 \Rightarrow n=27.56$$

Luego son necesarios n=28 subintervalos.

2. Dada la función $f(x) = xLn(x)$

a) Halla el polinomio interpolador global en forma de Hermite de $f(x)$ utilizando los datos $\{f(1), f'(1), f''(1), f(2)\}$.

b) Encuentra la cota del error del polinomio del apartado a) en x=0.5

c) Halla el polinomio interpolador lineal segmentario considerando los datos {1,2,4} y aproxima el valor de $f(2.5)$.

d) Halla una cota del error del interpolante hallado en c) en $[1,4]$

Nota: $C(x^*) = \left|\dfrac{(x^* - x_0)^{m_0+1} \dots (x^* - x_r)^{m_r+1}}{(n+1)!}\right| \mathrm{M}_{n+1}$ **(3 puntos)**

SOLUCIÓN:

a)

x	f(x)	Orden 1	Orden 2	Orden 3
1	0			
1	0	$\frac{f'(1)}{1!} = 1$		
1	0	1	$\frac{f''(1)}{2!} = 0.5$	
2	1.39	1.39	0.39	-0.11

$$H(x) = 0 + 1(x-1) + 0.5(x-1)^2 - 0.11(x-1)^3$$

$$f(0.5) \approx H(0.5) = 1 - 3(0.5)^2 + (0.5)^3 = 0.375$$

b)

$$M = \underset{[0.5,2]}{Max}\left|f^{4)}(x)\right| = \underset{[0.5,2]}{Max}\left|\frac{2}{x^3}\right| = 16$$

$$C(0.5) = \frac{\left|(0.5-1)^3(0.5-2)\right|}{4!} = 0.125$$

c) Interpolación lineal segmentaria en [1, 2]

x	f(x)	Orden 1	Orden 2
1	0		
2	1.39	1.39	

$r_1(x) = 0 + 1.39(x-1)$.

Interpolante lineal segmentario en [2,4]

x	f(x)	Orden 1	Orden 2
2	1.39		
4	5.55	2.08	

$$r_2(x) = 1.39 + 2.08(x-2)$$

$$f(2.5) \approx r_2(2.5) = 2.43$$

d) Cota del error:

$$C = \frac{h^2}{8} M_2 = \frac{4}{8} 1 = 0.5$$

$$\mathrm{M}_2 = \underset{[1,4]}{Max}\left|f^{2)}(x)\right| = \underset{[1,4]}{Max}\left|\frac{1}{x}\right| = 1$$

3. Dada la función $f(x) = x^3 + \sin(x) - 1$ **(2 puntos)**

a) Busca un intervalo de longitud 1 y extremos números enteros que contenga a su única raíz.
b) Haz una iteración del método de Bisección en el intervalo encontrado en **a).**
c) Haz una iteración del método de Newton con $x_0 = 0$
d) Haz una iteración del método de la secante con $x_0 = 0$; $x_1 = 0.5$.

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = x^3 + \sin(x) - 1$

$f(0) = -1$; $f(1) = \sin(1) \approx 0.84 \rightarrow I = [0,1]$

La función cambia de signo en los extremos del intervalo, al ser continua existirá al menos una solución en I (Bolzano).

b) Bisección:

a= 0 b= 1

c=0.5

$f(c) = f(0.5) = -0.4 < 0$

Luego el nuevo intervalo es: $I = [0.5,1]$

c) Iteración Newton:

La función de Newton es:

$$G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + \sin x - 1}{3x^2 + \cos x};$$

$$x_o = 0 \rightarrow x_1 = G(0) = 0 - \frac{-1}{1} = 1$$

d)

Sustituimos $f'(x_0) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{f(0.5) - f(0)}{0.5 - 0} \approx 1.21$

$$x_2 = 0 - \frac{f(0)}{1.21} = 0 - \frac{-1}{1.21} \approx 0.83;$$