EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS (24/04/2025)

OBSERVACIÓN:

- La teoría vista en clase permite hacer todos los ejercicios. No obstante, pueden utilizarse algunos métodos que agilizan los cálculos tal como aparecen en los textos por temas que están en esta plataforma; un ejemplo es cuando se hace la factorización A=LU, para resolver el sistema convertido en dos triangulares, puede hacerse la sustitución por progresión y regresión, aunque también puede hacerse resolviendo, despejando en las correspondientes matrices triangulares.
- Cuando pide "Tolerancia" (Tol), se debe aplicar a lo que en principio, según el método, podemos controlar, aunque después con el teorema general de acotación (Teorema del valor medio) podemos controlar tanto |x-s| como |f(x)-f(s)|
- Se pedirán todos los contenidos entre Tema 1 y Tema 4, EXCEPTUANDO la parte de Splines. De modo que lo último que entra es "Cúbicas segmentarias de Hermites" y su correspondiente Error y cota.

TODOS LOS CÁLCULOS DEBEN REDONDEARSE A 2 DECIMALES

1. Teoría y cuestiones

a) Usa el método de acotación para calcular un intervalo, I, que contenga al valor exacto de $F(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$ donde x=2.7, y=3.2 ambas calculadas con un error no superior a 0.4.

b) Haz una iteración de Jacobi con itinerante inicial $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, para resolver el sistema $\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 2 & -3 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$

.

c) Halla el polinomio interpolador global de $f(x)=x^4$ en base canónica en los nodos {0,2,4,6,8}.

d) Halla el mínimo número de subintervalos para que el error al usar interpolación lineal segmentaria de la función $f(x)=\sin(x)$ en el intervalo $[0,1]$ sea menor que 10^{-2}.

Nota: Cota del error $C=\dfrac{h^2}{8}M_2$. $f^{2)}(x)=-\sin(x)$.

Problemas

2. Dada la función $f(x)=x^2-e^x+2$

a) Halla el polinomio interpolador global en forma de Lagrange de $f(x)$ con datos $\{f(1),f(2),f(3),f(4)\}$.

b) Encuentra la cota del error del polinomio del apartado a) en x=4.5.

c) Halla el polinomio interpolador de Hermite segmentario en $[0,1]$ usando la partición uniforme de tamaño 1.

Nota: $C(x^*)=\left|\dfrac{(x^*-x_0)^{m_0+1}\ldots(x^*-x_r)^{m_r+1}}{(n+1)!}\right| \mathrm{M}_{n+1}$

3. Dada la función $f(x)=x^2-e^x+2$

a) Busca un intervalo de longitud 1 y extremos números enteros que contenga a su única raíz.

b) Haz una iteración del método de Newton con $x_0=-1$.

c) Busca una función, g(x), y un iterante inicial con los que realizar punto fijo para hallar la raíz con garantía de convergencia.

1. Teoría y cuestiones

a) Usa el método de acotación para calcular un intervalo, **I**, que contenga al valor exacto de $F(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$ donde x=2.7, y=3.2 ambas calculadas con un error no superior a 0.4.

b) Haz una iteración de Jacobi con iterante inicial $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, para resolver el sistema $\begin{pmatrix}2&0&-2\\2&-3&1\\5&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$.

c) Halla el polinomio interpolador global de $f(x)=x^4$ en base canónica en los nodos {0,2,4,6,8}.

d) Halla el mínimo número de subintervalos para que el error al usar interpolación lineal segmentaria de la función $f(x)=\sin(x)$ en el intervalo $[0,1]$ sea menor que 10^{-2}.

Nota: Cota del error $C=\dfrac{h^2}{8}M_2$. $f^{2)}(x)=-\sin(x)$.

SOLUCIÓN:

a)

$$\left.\begin{array}{l}2.3\le x\le 3.1\Rightarrow\sqrt{2.3}\le x\le\sqrt{3.1}\\ 2.8\le y\le 3.6\end{array}\right\}\Rightarrow 0.42\approx\frac{\sqrt{2.3}}{3.6}\le\frac{\sqrt{x}}{y}\le\frac{\sqrt{3.1}}{2.8}\approx 0.63$$

b) Despejamos cada incógnita

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{1+2z}{2}\\ y=\dfrac{4-2x-z}{-3}\\ z=-5x+2y\end{array}\right\}\xrightarrow[X_0]{}\left.\begin{array}{l}x=1.5\\ y=-0.33\\ z=-3\end{array}\right\}\rightarrow X_1=\begin{pmatrix}1.5\\-0.33\\-3\end{pmatrix}$$

c) El polinomio pedido tiene grado menor o igual que 4, f(x) tiene grado menor o igual que 4. Por la unicidad del polinomio interpolador el polinomio pedido debe ser $f(x)=x^4$

d) $\max_{[0,1]}\left|f^{2)}(x)\right|=\max_{[0,1]}\left|-\sin(x)\right|=\sin(1)=0.842$

$$\frac{h^2}{8}0.842<10^{-2}\Rightarrow h=0.31\Rightarrow n=3.23$$

Luego son necesarios n=4 subintervalos.

2. Dada la función $f(x)=x^2-e^x+2$

a) Halla el polinomio interpolador global en forma de Lagrange de $f(x)$ con datos $\{f(1),f(2),f(3),f(4)\}$.

b) Encuentra la cota del error del polinomio del apartado a) en x= 4.5.

c) Halla el polinomio interpolador de Hermite segmentario en $[0,1]$ usando la partición uniforme de tamaño 1.

Nota: $C(x^*)=\left|\frac{(x^*-x_0)^{m_0+1}...(x^*-x_r)^{m_r+1}}{(n+1)!}\right|\mathrm{M}_{n+1}$

SOLUCIÓN:

a)
$$f(1)\approx 0.28$$
$$f(2)\approx -1.39$$
$$f(3)\approx -9.09$$
$$f(4)\approx -36.6$$

$$P(x)=0.28\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}-1.39\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}-9.09\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}-36.6\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}=$$
$$=-0.05(x-2)(x-3)(x-4)-0.69(x-1)(x-3)(x-4)+4.54(x-1)(x-2)(x-4)-6.1(x-1)(x-2)(x-3)$$

b)

$$M\ =\underset{[1,4.5]}{Max}\left|f^{4)}(x)\right|=\underset{[1,4.5]}{Max}\left|-e^x\right|=e^{4.5}\approx 90.02$$
$$C(0.5)=\frac{\left|(4.5-1)(4.5-2)(4.5-3)(4.5-4)\right|}{4!}90.02=24.615$$

c) Interpolación de Hermite segmentaria en [0, 1]

$f(0)=1,\ f'(0)=-1$

$f(1)\approx 0.28,\ f'(1)\approx -0.72$

x	f(x)	Orden 1	Orden 2	Orden 3
0	1			
0	1	-1		
1	0.28	-0.72	0.28	
1	0.28	-0.72	0	-0.28

$H_1(x)=1-1x+0.28x^2-0.28x^2(x-1)$.

3. Dada la función $f(x)=x^2-e^x+2$

a) Busca un intervalo de longitud 1 y extremos números enteros que contenga a su única raíz.

b) Haz una iteración del método de Newton con $x_0=-1$.

c) Busca una función, g(x), y un iterante inicial con los que realizar punto fijo para hallar la raíz con garantía de convergencia.

SOLUCIÓN:

a) $f(x)=x^2-e^x+2$

$f(0)=1$, $f(1)\approx 0.28$, $f(2)\approx -1.39 \rightarrow I=[1,2]$

La función cambia de signo en los extremos del intervalo, al ser continua existirá al menos una solución en I (Bolzano).

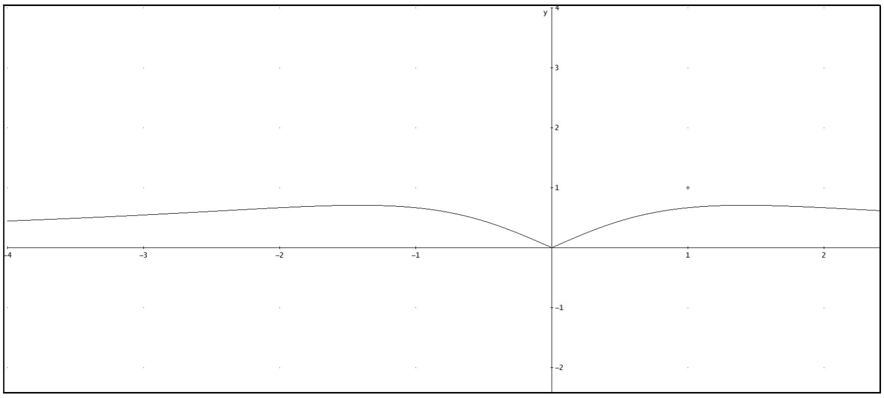
b) Iteración Newton:

La función de Newton es:

$$G(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^2-e^x+2}{2x-e^x};$$

$$x_o=-1\rightarrow x_1=G(-1)=-1-\frac{2.63}{-2.37}=0.11$$

c) $g(x)=Ln\left(x^2+2\right)$ ya que $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ cuya representación en valor absoluto es



Por lo que si escogemos $x_0 \in I = [1,2]$ el método de punto fijo convergerá.

1. Teoría y cuestiones

a) Una solución de la ecuación $10x^3 + 27x^2 + 11x = 6$ en el intervalo [0,1] es $\alpha = 0.3$. ¿Qué tolerancia hay que usar con el método de la cuerda para garantizar que si c es la aproximación ofrecida por cuerda entonces se cumple $|c - 0.3| < 10^{-5}$?

b) Halla la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ usando el método de Gauss **visto en el tema 2**.

c) Haz una iteración del método Gauss-Seidel usando $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d) Halla el mínimo número de subintervalos para que el error al usar interpolación cuadrática segmentaria (Forma 2) de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-0.5, 2.5]$ sea menor que 10^{-3}.

Nota: Cota del error $C = \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 M_3$. $f^{3)}(x) = e^x$.

Problemas

3. Dada la función $f(x)=3^x$ y los datos $\{f(0), f(1), f'(1), f(2)\}$

d) Calcula el interpolante lineal segmentario y evalúalo en x=1.5

e) Halla el polinomio interpolador global de Hermite de $f(x)$. ¿Es el mismo polinomio del apartado a? Razona la respuesta

f) Busca una cota del error del interpolante hallado en **c)** y el error real en $x=1.5$,

Nota: $f'(x)=3^x\ln(3)$ $\quad C(x^*)=\left|\dfrac{(x^*-x_0)^{m_0+1}\ldots(x^*-x_r)^{m_r+1}}{(n+1)!}\right| \mathrm{M}_{n+1}$

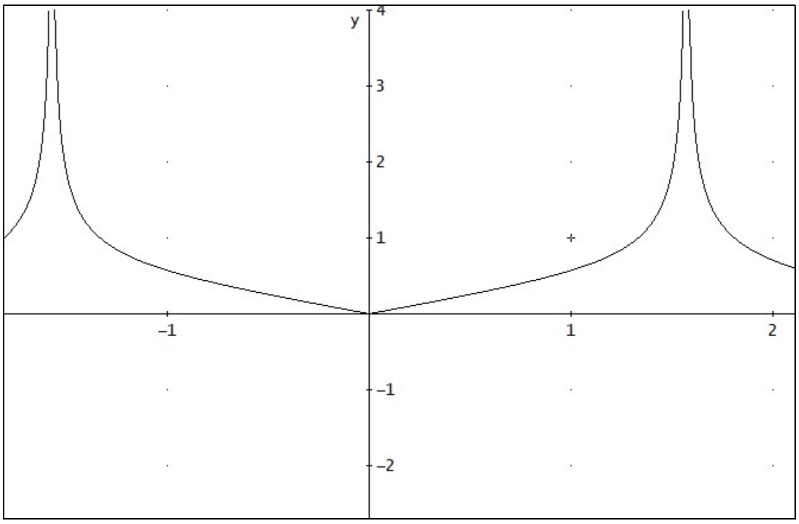
4. Dada la función $f(x)=x^2-\cos(x)$

d) Demuestra que tiene al menos una **raíz positiva** y proporciona un intervalo de números enteros que la contenga.

e) Haz una iteración del método de bisección en el intervalo dado en a) y obtén un intervalo más pequeño que contenga la solución.

f) Indica si la función $g_1(x)=\sqrt{\cos(x)}$ es una buena candidata para encontrar la solución de la ecuación con el método de punto fijo. Razona tu respuesta.

g) Haz dos iteraciones del método de Newton con $x_0=1$.



$$\left|g_1{}'(x)=\frac{d(\sqrt{\cos(x)})}{dx}=-\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}\right|$$

1. Teoría y cuestiones

a) Una solución de la ecuación $10x^3+27x^2+11x=6$ en el intervalo [0,1] es $\alpha=0.3$. ¿Qué tolerancia hay que usar con el método de la cuerda para garantizar que si c es la aproximación ofrecida por cuerda entonces se cumple $|c-0.3|<10^{-5}$?

b) Halla la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&4&1\end{pmatrix}$ usando el método de Gauss **visto en el tema 2**.

c) Haz una iteración del método Gauss-Seidel usando $X_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$$

d) Halla el mínimo número de subintervalos para que el error al usar interpolación cuadrática segmentaria (Forma 2) de la función $f(x)=e^x$ en el intervalo $[-0.5,2.5]$ sea menor que 10^{-3}.

Nota: Cota del error $C=\frac{\sqrt{3}}{27}h^3M_3$. $f^{3)}(x)=e^x$.

SOLUCIÓN:

a) Usando el Teorema general de acotación del error tenemos que

$|f'(x)|\geq m\ \forall x\in(a,b)$ entonces $|x-\alpha|\leq\frac{|f(x)|}{m}$ 1º) Calcularemos m

$f(x)=10x^3+27x^2+11x-6\Rightarrow f'(x)=30x^2+54x+11$. Las 2 soluciones de la derivada son aproximadamente $x_1\approx-1.57\quad x_2\approx-0.23$, luego en [0,1] la derivada es monótona creciente, luego $m=f'(0)=11$.

Entonces, si escogemos $tol=11\cdot10^{-5}\Rightarrow\quad |c-0.3|\leq\frac{|f(x)|}{m}\leq\frac{11\cdot10^{-5}}{11}=10^{-5}$

b) Tenemos que resolver 3 sistemas con la misma matriz de coeficientes, A, y como términos independientes la matriz I_3. Hallamos 1º) la factorización LU de la matriz

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-2F_2]{}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ahora modificamos los términos independientes con los mismos multiplicadores

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-2F_2]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

Por último, resolvemos los 3 sistemas

$$\left.\begin{matrix}x+2y=1\\y=0\\z=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=1,y=0,z=-1,\quad \left.\begin{matrix}x+2y=0\\y=1\\z=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=-2,y=1,z=-2,$$

$$\left.\begin{matrix}x+2y=0\\y=0\\z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=0,y=0,z=1$$

Luego $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

.

c)

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=3\\ y=1\\ x+4y+z=6\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c} x=3-2y\\ y=1\\ z=6-x-4y\end{array}\right\} X_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}3-0=3\\ 1\\ 6-3-4=-1\end{pmatrix}$$

d) $\max\limits_{[-0.5,2.5]}\left|f^{3)}(x)\right|=\left|e^{2.5}\right|\approx 12.19 \quad \dfrac{\sqrt{3}}{27}h^3 12.19\le 10^{-3}\Rightarrow h<1.1085\Rightarrow \dfrac{3}{n}<1.1085\Rightarrow n>2.706\Rightarrow n=4$

Luego son necesarios n=4 subintervalos porque en la forma 2, n debe ser par..

2. Dada la función $f(x)=3^x$ y los datos $\{f(0), f(1), f'(1), f(2)\}$

a) Calcula el interpolante lineal segmentario y evalúalo en x=1.5

b) Halla el polinomio interpolador global de Hermite de $f(x)$. ¿Es el mismo polinomio del apartado a)? Razona la respuesta

c) Busca una cota del error del interpolante hallado en **c)** y el error real en $x=1.5$,

Nota: $f'(x)=3^x\ln(3)$ $\qquad C(x^*)=\left|\dfrac{(x^*-x_0)^{m_0+1}\ldots(x^*-x_r)^{m_r+1}}{(n+1)!}\right| \mathrm{M}_{n+1}$

SOLUCIÓN:

a) Para calcular el interpolante lineal segmentario usamos:

$\{(0, f(0)=1), (1, f(1)=3), (2, f(2)=9)\}$

Tendremos 2 intervalos:

$I_1=[0,1]$

x	f(x)	Orden 1
0	1	
1	3	2

$y = 1 + 2x$

$I_1 = [1,2]$

x	f(x)	Orden 1
1	3	
2	9	6

$y = 3 + 6(x-1)$

$$g_1(x) = 1 + 2x \longrightarrow x \in I_1$$
$$g_2(x) = 3 + 6(x-1) \longrightarrow x \in I_2$$
$$0 \longrightarrow resto$$

$g(1.5) = g_2(1.5) = 6$

b) $f'(x) = 3^x \ln(3)$, $f'(1) = 3\ln(3) = 3.3$

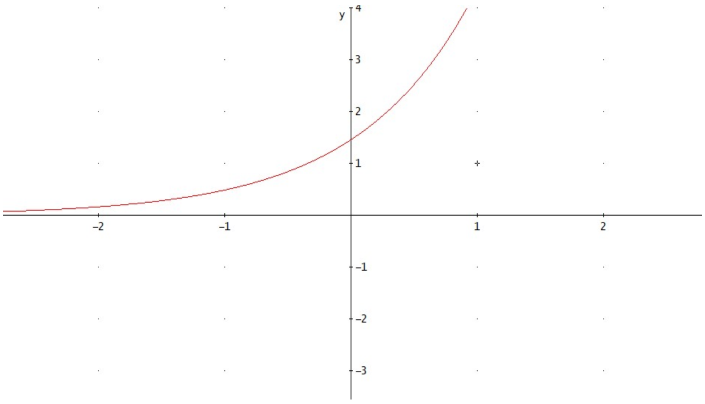
x	f(x)	Orden 1	Orden 2	Orden 3
0	1			
1	3	2		
1	3	3.3	1,3	
2	9	9-3/2-1 = 6	2,7	0.7

$$H(x) = 1 + 2x + 1.3x(x-1) + 0.7x(x-1)^2$$

No es el mismo polinomio. En el apartado a) la interpolación segmentaria y en este es global, Y en este caso usamos también datos de derivada.

c) Cota del error:

$$C(x^*) = \left| \frac{(x^* - x_0)^{m_0+1} \ldots (x^* - x_r)^{m_r+1}}{(n+1)!} \right| \mathrm{M}_{n+1}$$



$$M = \underset{[0,2]}{Max} \left| f^{4)}(x) \right| = \underset{[0,2]}{Max} \left| 3^x \ln(3)^4 \right| = 118$$

$$C(1.5) = \frac{\left|(1.5)(1.5-1)^2(1.5-2)\right|}{4!} 118 = 0,92$$

El error real es el valor de la función en 1.5 - interpolación en 1.5 = 5.19-5.23=0.0413, menor que la cota.

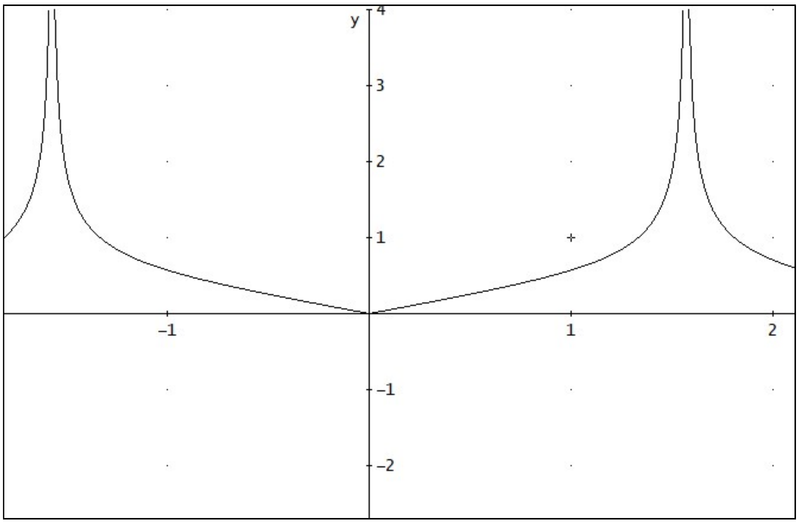
3. Dada la función $f(x) = x^2 - \cos(x)$

a) Demuestra que tiene al menos una raíz positiva y proporciona un intervalo de números enteros que la contenga.

b) Haz una iteración del método de bisección en el intervalo obtenido en a) y obtén un intervalo más pequeño que contenga la solución.

c) Indica si la función $g_1(x) = \sqrt{\cos(x)}$ es una buena candidata para encontrar la solución de la ecuación con el método de punto fijo. Razona tu respuesta.

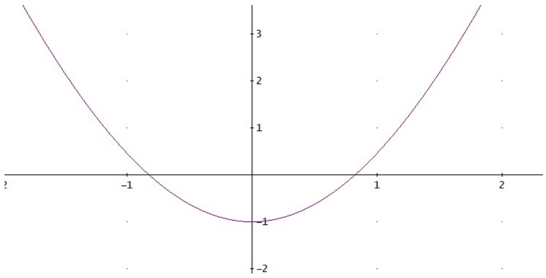
d) Haz dos iteraciones del método de Newton con $x_0 = 1$.



$$\left| g_1'(x) = \frac{d(\sqrt{\cos(x)})}{dx} = -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}} \right|$$

SOLUCIÓN:

d) $f(x) = x^2 - \cos(x)$



$f(0) = -1$; $f(1) = 0,46 \rightarrow I = [0,1]$

La función cambia de signo en los extremos del intervalo, al ser continua existirá al menos una solución en [0,1] (Bolzano).

e) Bisección:

a= 0 b=1

c=0.5

$f(c) = f(0.5) = -0.63 < 0$

Luego el nuevo intervalo es: $I = [0.5,1]$

f) Función auxiliar la obtenemos despejando una de las x

$g_1(x) = \sqrt{\cos(x)}$ -> Viendo la derivada primera si va a converger eligiendo un iterante inicial en el intervalo $I = [0.5,1]$ ya que $|g_1'(x)|$ es <1 en todo el intervalo

g) Iteraciones Newton:

La función de Newton es:

$$G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \cos(x)}{2x + \sin(x)};$$

$$x_o = 1 \rightarrow x_1 = G(1) = 1 - \frac{1 - \cos(1)}{2 + \sin(1)} = 0.83$$

$$x_2 = G(0.83) = 0,83 - \frac{0,83^2 - \cos(0,83)}{2 * 0.83 + \sin(0.83)} = 0.824$$

TODOS LOS CÁLCULOS DEBEN REDONDEARSE A 2 DECIMALES

1.- Teoría y cuestiones

a) Haz 1 iteración del método de la cuerda para hallar la raíz de $e^x + x = 0$ en el intervalo $I = [-1,0]$.

b) Usa el método de acotación del error con la fórmula $y = \dfrac{\cos(x)}{x}$ donde $x = 1$ con un error menor de 0.1 (usa radianes y **detalla las operaciones que haces**).

c) Comprueba la factorización LU con las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

d) Halla el interpolante lineal a trozos de la función $y = |x|$ en los nodos $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$.

2.- Sea la ecuación $x^2 - senx - 1 = 0$

a) Prueba que tiene al menos una raíz positiva.

b) Encuentra una función auxiliar (distinta de la de Newton) y un intervalo a los que al aplicar el método de punto fijo se resuelva la ecuación. **Indicación: trabaja en un intervalo donde** $senx \geq 0$.

c) Haz 2 iteraciones del método de Newton con $x_0 = 0$.

3.-

a) Halla el polinomio interpolador en forma de Newton de $f(x) = 2^x$ en los nodos $\{0,1,2\}$.

b) Halla el interpolante de Hermite a trozos con los datos de **a)** y obtén una cota del error en $[0,2]$.

Nota: Cota del error $E \leq \dfrac{h^4}{384} M_4$

1.- Teoría y cuestiones

a) Haz 1 iteración del método de la cuerda para hallar la raíz de $e^x + x = 0$ en el intervalo $I = [-1,0]$.

b) Usa el método de acotación del error con la fórmula $y = \dfrac{\cos(x)}{x}$ donde $x = 1$ con un error de 0.1 (usa radianesy **detalla las operaciones que haces)**

c) Comprueba la factorización LU con las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

d) Halla el interpolante lineal a trozos de la función $y = |x|$ en los nodos $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$

SOLUCIÓN:

a)

$$f(x)=e^x+x \quad ; f(-1)=\frac{1}{e}-1\approx -0.63$$

$$f(0)=1 \quad ; \text{ recta que pasa por } (-1,-0.63) \ y \ (0,1)$$

$$y-1=\frac{1.63}{1}x \quad ; \text{ corte con } y=0 \Rightarrow x_1=\frac{-1}{1.63}\approx -0.61$$

b)

$$0.9\le x\le 1.1 \underset{\substack{\cos x\\ decrec}}{\Rightarrow} \cos(1.1)\le\cos(x)\le\cos(0.9)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(1.1)}{1.1}\le\frac{\cos(x)}{x}\le\frac{\cos(0.9)}{0.9}\Rightarrow 0.41\le\frac{\cos(x)}{x}\le 0.69$$

c) $$L\cdot U=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\5&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\0&0&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&4&3\\5&1&1\end{pmatrix}=A$$

d) Obviamente

$$g(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x\in[-1,-0.5]\\ -x & \text{si } x\in[-0.5,0]\\ x & \text{si } x\in[0,0.5]\\ x & \text{si } x\in[0.5,1]\end{cases}$$

2.- Sea la ecuación $x^2-senx-1=0$

a) Prueba que tiene al menos una raíz positiva.

b) Encuentra una función auxiliar (distinta de la de Newton) y un intervalo a los que al aplicar el método de punto fijo se resuelva la ecuación.

c) Haz 2 iteraciones del método de Newton con $x_0=0$.

SOLUCIÓN:

a) $f(x)=x^2-senx-1$; $f(0)=-1<0$; $f(\pi)=\pi^2-1\approx 8.87>0$ como es continua tiene al meno una raíz en $[0,\pi]$.

b)

$$g_1(x)=\sqrt{senx+1} \quad ; \quad g_1'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{senx+1}}$$

$$\left|\frac{\cos x}{2\sqrt{senx+1}}\right|<\frac{1}{2} \text{ en } [0,\pi]$$

c)

$$g(x)=x-\frac{x^2-senx-1}{2x-\cos x} \quad x_1=g(0)=-\frac{-1}{-1}=-1$$

$$x_2=g(-1)=-1-\frac{-sen(-1)}{(-2)-\cos(-1)}\approx -0.67$$

3.-

a) Halla el polinomio interpolador en forma de Newton de $f(x)=2^x$ en los nodos $\{0,1,2\}$.

b) Halla el interpolante de Hermite a trozos con los datos de **a)** y obtén una cota del error en $[0,2]$.

Nota: Cota del error $E\le\frac{h^4}{384}M_4$

SOLUCIÓN:

a)

x	**0**	**1**	**2**
$f(x)$	**1**	**2**	**4**

x	orden 0	orden 1	orden 2
0	1		
1	2	1	
2	4	2	0.5

$$P_2(x)=1+1x+0.5x(x-1)$$

b)

x	**0**	**1**	**2**
$f(x)$	**1**	**2**	**4**
$f'(x)$	**0.69**	**1.39**	**2.77**

$I_1 = [0,1]$

x	orden 0	orden 1	orden 2	orden 3
0	1			
0	1	0.69		
1	2	1	0.31	
1	2	1.39	0.39	0.08

$H_1(x) = 1 + 0.69x + 0.31x^2 + 0.08x^2(x-1)$

$I_2 = [1,2]$

x	orden 0	orden 1	orden 2	orden 3
1	2			
1	2	1.39		
2	4	2	0.61	
2	4	2.77	0.77	0.16

$H_2(x) = 2 + 1.39(x-1) + 0.61(x-1)^2 + 0.16(x-1)^2(x-2)$

Cota del error

TODOS LOS CÁLCULOS DEBEN REDONDEARSE A 2 DECIMALES

1.- Teoría y cuestiones

a) Demuestra que al usar el método de Newton para resolver la ecuación $f(x) = 0$ se consigue convergencia cuadrática.

b) Halla los errores absoluto y relativo al calcular $C = sen(x)$ donde $x = 0.7$ con un error no superior a 0.1. (usar radianes).

c) Razona cómo ha de ser una matriz de orden 3x3 para que al aplicarle los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel salgan los mismos resultados en cada iteración.

d) Calcula una iteración del método de la cuerda para resolver la ecuación $x \sin x = 0$ en el intervalo $I = [3,4]$

2.-

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Haz 1 iteración por el método de Jacobi para encontrar su inversa con iterante inicial $X_0 = (0,0,0)$.

b) ¿Cuántas operaciones habría que hacer para calcular su inversa por el método de Gauss-Jordan?

3.-

a) Halla el polinomio interpolador de $f(x)=x^3+3x^2-2x+1$ usando los datos $f(0), f(1), f'(1), f''(1), f(2)$.

b) Halla una cota del error del spline completo de $g(x)=Ln(x)$ en los nodos $\{1,1.5,2\}$ Nota: cota del error del spline completo $E(x)\leq\dfrac{5}{384}h^4M_4$

1.- Teoría y cuestiones

a) Demuestra que al usar el método de Newton para resolver la ecuación $f(x)=0$ se consigue convergencia cuadrática.

b) Halla los errores absoluto y relativo al calcular $C=sen(x)$ donde $x=0.7$ con un error no superior a 0.1. (usar radianes).

c) Razona cómo ha de ser una matriz de orden 3x3 para que al aplicarle los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel salgan los mismos resultados en cada iteración.

d) Calcula una iteración del método de la cuerda para resolver la ecuación $x\sin x=0$ en el intervalo $I=[3,4]$

SOLUCIÓN:

a) Tendremos convergencia cuadrática usando el método de punto fijo con una función $g(x)$ que verifique qu $g'(\alpha)=0$ donde α es el punto fijo. Veamos que la función de Newton lo verifica

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\Rightarrow g'(x)=1-\frac{\left(f'(x)\right)^2-f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2};$$

$$g'(\alpha)=1-\frac{\left(f'(\alpha)\right)^2-f(\alpha)f''(\alpha)}{\left(f'(\alpha)\right)^2}\underset{f(\alpha)=0}{=}0$$

b)

$f(x) = senx \Rightarrow Df(x) = \cos x$

$DLn(f(x)) = \dfrac{\cos x}{senx}$

$Ea(0.7) = Df(0.7)\cdot 0.1 = (\cos(0.7))\cdot 0.1 = 0.08$

$Er(0.7) = DLn(f(0.7))\cdot 0.1 = \dfrac{\cos(0.7)}{sen(0.7)}0.1 = 0.12 \Rightarrow 12\%$

c)

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; Obviamente $diag(A) \neq 0$ para poder realizar las iteraciones.

El cálculo de x es igual en ambos casos. Para que y sea igual ha de ocurrir que x no aparezca al calcular y, z, lueg $a_{21} = a_{31} = 0$. Una vez calculada y, no puede aparecer al calcular z. Por tanto $a_{32} = 0$.

En definitiva A ha de ser triangular superior. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

d) $f(x) = xsenx \quad f(3) = 0.42 \quad f(4) = -3.03$. Recta que pasa por los puntos $(3, 0.42)$ $(4, -3.03)$ es $r \equiv y = 0.42 - 3.45(x-3)$.

Corte con el eje de abscisas $0 = 0.42 - 3.45(x-3) \Rightarrow x = 3.12$; $f(3.12) = 0.07$.

2.-

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Haz 1 iteración por el método de Jacobi para encontrar su inversa con iterante inicial $X_0 = (0,0,0)$

b) ¿Cuántas operaciones habría que hacer para calcular su inversa por el método de Gauss-Jordan?

SOLUCIÓN:

a) Para hallar la inversa hay que resolver 3 sistemas que son

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hagamos una iteración de cada uno de ellos:

$$4x-y+2z=\begin{cases}1\\0\\0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{1/0/0+y-2z}{4}$$

$$x+3y+z=\begin{cases}0\\1\\0\end{cases}\Rightarrow y=\frac{0/1/0-x-z}{3}$$

$$x-y+3z=\begin{cases}0\\0\\1\end{cases}\Rightarrow z=\frac{0/0/1-x+y}{3}$$

Primer sistema: $X_0=(0,0,0)$; $X_1=\left(\frac{1}{4},0,0\right)$

Segundo sistema: $X_0=(0,0,0)$; $X_1=\left(0,\frac{1}{3},0\right)$

Tercer sistema: $X_0=(0,0,0)$; $X_1=\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$

b) De la matriz A hay que llegar a I_{3x3} y hacer las mismas operaciones en I_{3x3} para llegar a A^{-1}, por tanto:

- 0's en la primera columna: **2 productos** para calcular los multiplicadores, **5 productos** más para recalcular fila F_2 de A y la fila F_2 (aunque en realidad son menos, por ser la matriz identidad, pero no lo tendremos e cuenta) de I_{3x3} y **5 productos** más para recalcular la fila F_3 de A y la fila F_3 de I_{3x3}. Más 1 producto par obtener 1 en la diagonal de A Total **13 productos**.
- Hay que hacer lo mismo en las 3 columnas, por tanto **Total 39 productos**.

3.-

a) Halla el polinomio interpolador de $f(x)=x^3+3x^2-2x+1$ usando los datos $f(0),f(1),f'(1),f''(1),f(2)$.

b) Halla una cota del error del spline completo de $g(x)=Ln(x)$ en los nodos $\{1,1.5,2\}$ Nota: cota del error del spline completo $E(x)\le\frac{5}{384}h^4M_4$

SOLUCIÓN:

a) El polinomio interpolador ha de ser el único polinomio de grado menor o igual que 4 que verific $P_4(0)=f(0),P_4(1)=f(1),P_4'(1)=f'(1),P_4''(1)=f''(1),P_4(2)=f(2)$.

Por lo tanto $P_4(x)=f(x)=x^3+3x^2-2x+1$

$$f(x) = Ln(x)\,;\; f^{4)}(x) = \frac{-6}{x^4}\,;\; \left|f^{4)}(x)\right| \underset{[1,2]}{=} \frac{6}{x^4} \Rightarrow$$

b) $\Rightarrow M_4 = \dfrac{6}{1^4} = 6$

$$E(x) \leq \frac{5}{384} 0.5^4 \cdot 6 = 0.004$$

TODOS LOS CÁLCULOS DEBEN REDONDEARSE A 2 DECIMALES

1.- Encuentra una raíz **negativa** de la ecuación $x^3 - 2x^2 + x + 1$. Para ello

a) Busca un primer intervalo I_0 de longitud 1 que contenga a la raíz y demuestra que en dicho intervalo la raíz es única.

b) Haz una iteración del método de la cuerda en I_0 para dar un nuevo intervalo I_1 que contenga a la raíz.

c) Haz dos iteraciones del método de Newton usando como iterante inicial $x_0 = 0$.

2.- La descomposición LU de cierta matriz *A* es $L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.25 & 1 & 0\\ 0.25 & -0.23 & 1\end{pmatrix} U=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 3.25 & 0.5\\ 0 & 0 & 2.62\end{pmatrix}$

Resuelve, sin calcular *A*, el sistema $AX=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

3.-

a) Halla el polinomio interpolador global de $f(x)=x^3+3x^2-2x+1$ usando los datos $f(0), f(1), f'(1)$.

b) Y usando los datos $f(0), f(1), f'(1), f''(1), f(2)$

c) Queremos interpolar $g(x)=Ln(x)$ en el intervalo $[1,2]$ usando interpolación lineal segmentaria en una malla equiespaciada. ¿A partir de cuántos subintervalos obtendremos un error menor que 10^{-4}?

Nota: cota del error del interpolante lineal $E(x)\leq \frac{1}{8}h^2M_2$, $g''(x)=\frac{-1}{x^2}$

1.- Encuentra una raíz **negativa** de la ecuación x^3-2x^2+x+1. Para ello

a) Busca un primer intervalo I_0 de longitud 1 que contenga a la raíz y demuestra que en dicho intervalo la raíz es única.

b) Haz una iteración del método de la cuerda en I_0 para dar un nuevo intervalo I_1 que contenga a la raíz.

c) Haz dos iteraciones del método de Newton usando como iterante inicial $x_0=0$.

SOLUCIÓN:

a) $f(x)=x^3-2x^2+x+1$; $f(0)=1$; $f(-1)=-3$ luego $I_0=[-1,0]$. Veamos que en este intervalo la raíz es única estudiando la monotonía de la función.

$f'(x)=3x^2-4x+1$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}\Rightarrow x_1=1 ; x_2=\frac{1}{3}$ luego en I_0 la derivada es siempre positiva, luego la función siempre es creciente, luego la raíz es única.

b) La recta que pasa por $(0,1)$ y $(-1,-3)$ es $y-1=\frac{1--3}{0--1}x\Rightarrow y-1=4x$. Corte con el eje de abscisas

$0-1=4x\Rightarrow x=\frac{-1}{4}$; $f\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{-1}{64}-\frac{2}{16}-\frac{1}{4}+1=\frac{39}{64}\approx 0.61$. Luego el nuevo intervalo será $I_1=[-1,-0.25]$.

c) Buscamos la función auxiliar de Newton y hacemos las iteraciones

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^3-2x^2+x+1}{3x^2-4x+1}$$

$$x_1=g\left(x_0\right)=0-\frac{f\left(0\right)}{f'\left(0\right)}=-\frac{1}{1}=-1$$

$$x_2=g\left(x_1\right)=-1-\frac{f\left(-1\right)}{f'\left(-1\right)}=-1-\frac{-3}{8}=\frac{-5}{8}\approx-0.62$$

2.- La descomposición LU de cierta matriz *A* es $L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.25 & 1 & 0\\ 0.25 & -0.23 & 1\end{pmatrix} U=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 3.25 & 0.5\\ 0 & 0 & 2.62\end{pmatrix}$.

Resuelve, sin calcular *A*, el sistema $AX=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN:

1º) Hacemos la sustitución progresiva del término independiente

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2-0.25F_1\\F_3-0.25F_1}]{}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+0.23F_2]{}\begin{pmatrix}0\\1\\1.23\end{pmatrix}$$

2º) Hacemos la sustitución regresiva

$$z=\frac{1.23}{2.62}\approx 0.47$$

$$y=\frac{1-0.5\cdot 0.47}{3.25}\approx 0.24$$

$$x=\frac{-2\cdot 0.47+0.24}{4}\approx -0.17$$

3.-

a) Halla el polinomio interpolador global de $f(x)=x^3+3x^2-2x+1$ usando los datos $f\left(0\right),f\left(1\right),f'\left(1\right)$.

b) Y usando los datos $f\left(0\right),f\left(1\right),f'\left(1\right),f''\left(1\right),f\left(2\right)$

c) Queremos interpolar $g(x)=Ln\left(x\right)$ en el intervalo $\left[1,2\right]$ usando interpolación lineal segmentaria en una malla equiespaciada. ¿A partir de cuántos subintervalos obtendremos un error menor que 10^{-4}?

Nota: cota del error del interpolante lineal $E(x) \le \frac{1}{8} h^2 M_2$, $g''(x) = \frac{-1}{x^2}$

SOLUCIÓN:

a)

x	orden 0	orden 1	orden 2
0	$f(0)=1$		
1	$f(1)=3$	$f[0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1}=2$	
1	$f(1)=3$	$f[1,1]=\frac{f'(1)}{1}=7$	$f[0,1,1]=\frac{7-2}{1}=5$

$$P_2(x) = 1 + 2x + 5x(x-1)$$

b) Con 5 datos obtendremos un polinomio de grado a lo sumo 4. Por la unicidad del polinomio interpolador , ese polinomio ha de ser $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

c) $M_2 = \max_{[1,2]} |g''(x)| = \max_{[1,2]} \left|\frac{-1}{x^2}\right| = \max_{[1,2]} \frac{1}{x^2} = 1$

$$E(x) \le \frac{1}{8} h^2 M_2 = \frac{1}{8} h^2 1 < 10^{-4} \Rightarrow h^2 < \frac{8}{10^4} \Rightarrow h < \frac{2\sqrt{2}}{10^2} \approx 0.03$$

$$h = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{h} \approx 35.36$$

Como n es un número natural, tendremos que considerar a partir de 36 subintervalos.