UNIVERSIDAD DE BURGOS. Escuela Politécnica Superior
Ingeniería Informática
Departamento de Matemáticas y Computación. Métodos Numéricos y Optimización

Parcial Cálculo Numérico

24 de abril de 2025

Cuestión: Una solución de la ecuación $10x^3 + 27x^2 + 11x = 6$ en el intervalo $[0,\ 1]$ es $\alpha = 0,3$ ¿Qué tolerancia hay que usar con el método de la cuerda para garantizar que si c es la aproximación ofrecida por el método de **la cuerda** entonces $|c - \alpha| < 10^{-5}$?

2 Puntos

Ejercicio 1: Dada la función $f(x) = \sqrt{x}\sin(x) - x^3 + 2$ encuentra una aproximación de una raíz

1. Con el método de la **bisección** con un error menor que $1/30$

   1.5 Puntos

2. Con 4 iteracciones del método de **Newton-Raphson**

   1.5 Puntos

$$(\sqrt{x}\sin(x) - x^3 + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\sin(x) + \sqrt{x}.\cos(x) - 3x^2$$

Ejercicio 2: Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que se cumplen alguna de las condiciones que garantice la convergencia del método de Jacobi, justificando la respuesta con la norma utilizada.

1 Punto

b) Realiza dos iteracciones tomando como valor inicial $(0,\ 0,\ 0)$.

1.5 Puntos

Ejercicio 3: Dada la función $f(x) = \frac{1}{x+3}$ y los nodos $\{-2,\ 0,\ 1\}$

a) Calcula la cúbica de Hermites segmentaria utilizando todos los datos anteriores y utilízala para aproximar $f(-0,5)$

1.5 Puntos

b) Halla el nmero mínimo de subintervalos de la misma longitud (malla uniforme) en el que hay que dividir el intervalo $[-2,\ 1]$ para asegurar que el error que se comete al aproximar el valor de $f(x)\ \forall\ x \in [-2,\ 1]$ por la cúbica de Hermites segmentaria es inferior a 10^{-6}

1 Punto

Observación 1.

- $\left(\frac{1}{x+3}\right)' = \frac{-1}{(x+3)^2}$
- *La cúbica segmentada se obtiene sacando la cúbiga global en* $[-2,\ 0]$ *y en* $[0,\ 1]$
- *AL calcular Hermites respecto una función f para un nodo x_0, las diferencias divididas cuando se repite sólo un nodo es:*

$$[x_0, x_0] = \frac{f'(x_0)}{1!} \qquad [x_0, x_0, x_0] = \frac{f''(x_0)}{2!} \qquad \dots \qquad [x_0, \overset{(n+1)\ veces}{\dots}, x_0] = \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}$$

- *Si* $x \in [x_i,\ x_{i+1}] \Rightarrow (x - x_i)^2.(x - x_{i+1})^2 \leq \left(\frac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\right)^4$. *Esa desigualdad se utiliza para encontrar una cota al error de aproximación con el método de la cúbica de Hermites global en ese intervalo, en el que también deberás calcular el máximo de f'''' para acotar el error. Este intervalo es uno de los que resulten al dividir* $[-2,\ 1]$ *en intervalos más pequeos cuyo número es lo que pido en el último apartado. Por último ten en cuenta que para que la cota de error no dependa de* $x \in [x_i,\ x_{i+1}]$ *hay que utilizar el máximo de f'''' en todo* $[-2,\ 1]$